VALORE ATTESO CONDIZIONATO; VA GAUSSIANE BIVARIATE

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $B \in \mathcal{E}$ $\mathbb{P}(B) > 0$.

Per $A \in \mathcal{E}$ $\quad \mathbb{P}(A|B) := \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ $\quad$ Indico $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A)$.

Abbiamo dimostrato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}_B)$ è ancora uno spazio probabilizzato t.c. $\mathbb{P}_B(A) = 1 \quad \forall A \supseteq B$.

Sia ora $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$$

Considero $\mathbb{E}_B[X] := \displaystyle\int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}_B(d\omega)$

1° caso $\quad X$ funzione semplice $\quad X(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \quad E_i = \{X = c_i\}$

$$\mathbb{E}_B[X] = \int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}_B(d\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{P}_B(E_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i \frac{\mathbb{P}(E_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{E_i \cap B}(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$$

Ma $\mathbb{1}_{E_i \cap B}(\omega) = \mathbb{1}_{E_i}(\omega)\, \mathbb{1}_B(\omega)$

$$\mathbb{E}_B[X] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \right) \mathbb{1}_B(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_\Omega X(\omega) \mathbb{1}_B(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]$$

2° CASO $\quad X$ v.a. nonnegativa.

Sappiamo che $\exists \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ φ_k funzione semplice

t.c. $\quad 0 \le \varphi_k(\omega) \le \varphi_{k+1}(\omega) \quad \forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall \omega \in \Omega$

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(\omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

Se considero $\psi_k := \varphi_k \mathbb{1}_B$, allora ψ_k è ancora funzione semplice, $0 \le \psi_k(\omega) \le \psi_{k+1}(\omega)$

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(\omega) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\omega)\mathbb{1}_B(\omega) = X(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)$$

$$\int_\Omega \varphi_k(\omega)\mathbb{P}_B(d\omega) = \mathbb{E}_B[\varphi_k] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[\varphi_k \mathbb{1}_B] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[\psi_k]$$

$$\Big\downarrow \text{ Beppo Levi}$$

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}_B(d\omega) = \mathbb{E}_B[X]$$

$$\frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[\psi_k] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\int_\Omega \psi_k(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\swarrow \text{ Beppo Levi}$$

$$\frac{1}{\mathbb{P}(B)}\int_\Omega X(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}_B[X] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] \quad \forall X \text{ v.a nonnegative}$$

3° CASO X sia v.a t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito

$$\mathbb{E}_B[X] = \mathbb{E}_B[X^+] - \mathbb{E}_B[X^-] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[X^+\mathbb{1}_B] - \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[X^-\mathbb{1}_B]$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}\left[X^+\mathbb{1}_B - X^-\mathbb{1}_B\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[(X^+ - X^-)\mathbb{1}_B] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]$$

$\mathbb{E}_B[X]$ si dice VALORE ATTESO DI X CONDIZIONATO DALL'EVENTO B.

— o —

Sia ora $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a discreta concentrata su $\{y_j\}_{j\in J}$ $\quad J = 1 \dots N \;$ o $\; J = \mathbb{N}$

$\mathbb{P}(Y=y_j) > 0$

Pongo $B_j = \{Y = y_j\} \Rightarrow \mathbb{E}_{B_j}[X]$ si indica col simbolo $\mathbb{E}[X \mid Y = y_j]$ e si dice VALORE ATTESO di X CONDIZIONATO DA $Y = y_j$.

Supponiamo che anche X sia discreta concentrata su $\{x_i\}_{i \in J}$ $J = 1 \_\_ N_x$ o $J = \mathbb{N}$

Posso scrivere $X(\omega) = \sum_{i \in J} x_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega)$ $E_i = \{X = x_i\}$

Supponiamo che $\mathbb{E}[X]$ esiste finito.

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y_j] = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_j)} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{Y = y_j\}}] = ?$$

$$(X \mathbb{1}_{\{Y = y_j\}})(\omega) = \sum_{i \in J} x_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \mathbb{1}_{\{Y = y_j\}}(\omega) =$$

$$= \sum_{i \in J} x_i \mathbb{1}_{E_i \cap \{Y = y_j\}}(\omega)$$

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y_j] = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_j)} \sum_{i \in J} x_i \mathbb{P}(E_i \cap \{Y = y_j\})$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_j)} \sum_{i \in J} x_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$= \sum_{i \in J} x_i \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$$

X, Y v.a. discrete $\quad p_{ij} := \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$

$q_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y_j] = \sum_{i \in J} x_i \frac{p_{ij}}{q_j}$$

DENSITÀ DISCRETA CONDIZIONATA

$\_\_ \circ \_\_$

Sia Y v.a. discreta, X v.a t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito

$Y(\Omega) = \{y_j\}_{j \in J}$

$B_j = \{Y = y_j\}$. Chi è $\sigma(Y)$?

$$\sigma(Y) = \{ A = \bigcup_{j \in J_A} B_j \; : \; J_A \subseteq J \} \subseteq \mathcal{E}$$

In generale $\sigma(Y) \subsetneq \mathcal{E}$

Cerco una funzione $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c.

$$Z^{-1}(C) \in \sigma(Y) \qquad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

cioè cerco Z v.a. sullo spazio misurabile $(\Omega, \sigma(Y))$

e t.c.

$$\int_A Z(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_A X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall A \in \sigma(Y) \quad \star$$

$A \in \sigma(Y) \iff A = \bigcup_{j \in J_A} B_j \quad J_A \subset J$

$$\int_A Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\bigcup_{j \in J_A} B_j} Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{j \in J_A} \int_{B_j} Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\int_A X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\bigcup_{j \in J_A} B_j} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{j \in J_A} \int_{B_j} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$\Rightarrow$ la proprietà $\star$ è soddisfatta se e solo se

$$\iff \int_{B_j} Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{B_j} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall j \in J$$

Prendo Z costante su B_j e sia $z_j := Z(\omega) \quad \omega \in B_j$

$$Z(\omega) = \sum_{j \in J} z_j \mathbb{1}_{B_j}(\omega)$$

Sostituisco in ⊛ : $\int_{B_j} Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = z_j \mathbb{P}(B_j) \Rightarrow$

$$z_j \mathbb{P}(B_j) = \int_{B_j} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} X(\omega)\mathbb{1}_{B_j}(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$$z_j = \frac{1}{\mathbb{P}(B_j)} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{B_j}] = \mathbb{E}_{B_j}[X] = \mathbb{E}[X \mid Y = y_j]$$

$$Z(\omega) = \sum_{j \in J} \mathbb{E}[X \mid Y = y_j] \, \mathbb{1}_{\{Y = y_j\}}(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega$$

La v.a. $Z(\omega)$ si indica col simbolo $\mathbb{E}[X \mid Y](\omega)$
e si dice VALORE ATTESO DI X DATO Y

N.B. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$.

—— o ——

TEOREMA DI RADON-NIKODÝM

Sia $(\Omega, \mathcal{E})$ spazio misurabile.

Siano $\lambda : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$
$\mu : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$ due misure finite $\lambda(\Omega) < +\infty$ $\mu(\Omega) < +\infty$

Allora le due seguenti condizioni sono equivalenti:

1) Se $A \in \mathcal{E}$ e $\mu(A) = 0$, allora $\lambda(A) = 0$
(questa condizione si dice $\lambda << \mu$ λ ASSOLUTAMENTE CONTINUA RISPETTO A μ)

2) $\exists h : \Omega \to \mathbb{R}$ funzione $\mathcal{E}$-misurabile t.c.
$h \geq 0$ μ-q.o.
$\int_\Omega h(\omega)\mu(d\omega) < +\infty$

t.c. $\lambda(A) = \int_A h(\omega)\mu(d\omega)$

Se k è un'altra funzione che gode di queste proprietà, allora $k = h$ μ-q.o.

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$ una sotto σ-algebra di $\mathcal{E}$

Sia $\mathbb{P}_{\mathcal{G}} := \mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$ $\longrightarrow$ $\mathbb{P}$ ristretto a $\mathcal{G}$. Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $\mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito.

Allora $\exists Z: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{G}})$ t.c.

$$\int_B Z(\omega) \mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) = \int_B X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall B \in \mathcal{G}$$

Se Z_1 e Z_2 sono due v.a. su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{G}})$ aventi queste proprietà, allora $Z_1 = Z_2$ $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-q.c.

DIM 1° CASO $X \geq 0$

$B \in \mathcal{G}$ $\quad \alpha(B) := \int_B X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$

Considero $(\Omega, \mathcal{G}, \alpha)$. Questo è uno spazio di misura.

1) $\alpha(\phi) = 0$

2) $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}$ $\quad B_n \cap B_k = \phi$

$$\alpha\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{B_n} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha(B_n)$$

- α è una misura finita perché $\alpha(\Omega) = \int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[X]$ che per ipotesi è finito.

- $\alpha \ll \mathbb{P}_{\mathcal{G}}$ perché se $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(B) = 0 \Rightarrow \alpha(B) = \int_B X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = 0$

Applico il Teo di Radon-Nikodým a α e $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$

$\exists Z: \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-misurabile t.c.

$$\alpha(B) = \int_B Z(\omega) \mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) \qquad \forall B \in \mathcal{G}$$

cioè
$$\int_B X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_B Z(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) \quad \forall B\in\mathcal{G}$$

2° caso X v.a. t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito

$\Rightarrow$ so che X^+ e X^- sono v.a. nonnegative con valore atteso finito. Applico il 1° caso e X^+ e a X^-

$\exists\, Z_+$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{G}})$ t.c.
$$\int_B X^+(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_B Z_+(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) \quad \forall B\in\mathcal{G}$$
$\exists\, Z_-$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{G}})$ t.c.
$$\int_B X^-(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_B Z_-(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) \quad \forall B\in\mathcal{G}$$

Sottraggo membro a membro
$$\int_B (X^+ - X^-)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_B (Z_+ - Z_-)(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) \quad \forall B\in\mathcal{G}$$
Definisco $Z := Z_+ - Z_-$, è ancora una v.a. su $(\Omega, \mathcal{G})$ e ottengo
$$\int_B X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_B Z(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) \quad \forall B\in\mathcal{G}$$

<u>UNICITÀ</u> Supponiamo che Z_1 e Z_2 siano due v.a. su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{\mathcal{G}})$ che soddisfano
$$\int_B X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_B Z_1(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) = \int_B Z_2(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) \quad \forall B\in\mathcal{G}$$
Posso scegliere $B = \{Z_1 > Z_2\}$

$$\int_{\{Z_1>Z_2\}} Z_1(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)=\int_{\{Z_1>Z_2\}} Z_2(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)$$

$$\int_{\{Z_1>Z_2\}} (Z_1-Z_2)(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)=0 \implies \mathbb{P}(Z_1>Z_2)=0$$

Analogamente si dimostra $\mathbb{P}(Z_1<Z_2)=0$
e di conseguenza $\mathbb{P}(Z_1\neq Z_2)=0$ cioè $Z_1=Z_2$ $\mathbb{P}$-q.c.

La $Z(\omega)$ si indica $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega)$ VALORE ATTESO DI X DATA $\mathcal{G}$
Nel caso in cui $\mathcal{G}=\sigma(Y)$ σ-algebra generata da una ulteriore v.a. Y non si scrive $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)](\omega)$ ma si scrive $\mathbb{E}[X|Y](\omega)$ e si chiama VALORE ATTESO DI X DATA Y.

— o —

Sia $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ spazio probabilizzato e siano $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ su questo spazio

$$\begin{array}{ccc} (\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P}) & \xrightarrow{X} & (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathbb{P}_X) \\ {\scriptstyle Y}\downarrow & & \\ (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathbb{P}_Y) & & \end{array}$$

Per $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ considero $\int_{Y^{-1}(A)} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$

$\exists\, \varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di Borel t.c. $\int_{Y^{-1}(A)} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)=\int_A \varphi(y)\,\mathbb{P}_Y(dy)$? $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

1° CASO $X\geq 0$, $\mathbb{E}[X]$ finito.

Considero $\lambda(A)=\int_{Y^{-1}(A)} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$ $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ è uno spazio di misura:

1) $\lambda(\emptyset) = 0$

2) $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\lambda\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \int_{Y^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Y^{-1}(A_i)} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{Y^{-1}(A_i)} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

- λ è una misura finita perché $\lambda(\mathbb{R}) = \int_{Y^{-1}(\mathbb{R})} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) =$

$$= \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[X].$$

- $\lambda \ll \mathbb{P}_Y$ perché se $\mathbb{P}_Y(A) = 0$ $\quad \mathbb{P}(Y \in A) = 0$ $\quad \mathbb{P}(Y^{-1}(A)) = 0$

$$\Rightarrow \lambda(A) = \int_{Y^{-1}(A)} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = 0$$

$\Rightarrow$ Posso applicare il Teorema di Radon-Nikodym a λ e $\mathbb{P}_Y$ su $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Borel nonnegativa t.c. $\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathbb{P}_Y(dt) < +\infty$

e t.c.

$$\lambda(A) = \int_A f(t)\,\mathbb{P}_Y(dt) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

cioè

$$\int_{Y^{-1}(A)} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A f(t)\,\mathbb{P}_Y(dt) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

<u>2° CASO</u> $\quad X$ v.a. t.c. $\mathbb{E}[X]$ esiste finito

Scompongo $X = X^+ - X^-$

Per il 1° caso $\exists f_+$ e $f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Borel, nonnegative, sommabili t.c.

$$\int_{Y^{-1}(A)} X^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A f_+(t)\,\mathbb{P}_Y(dt) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\int_{Y^{-1}(A)} X^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A f_-(t)\,\mathbb{P}_Y(dt)$$

Sottraendo membro a membro

$$\int_{Y^{-1}(A)} (X^+ - X^-)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_A \big(\varphi_+(t) - \varphi_-(t)\big)\,\mathbb{P}_Y(dt) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

cioè $\displaystyle\int_{Y^{-1}(A)} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_A \varphi(t)\,\mathbb{P}_Y(dt) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\varphi := \varphi_+ - \varphi_-$

Supponiamo che φ_1 e φ_2 siano due funzioni con le proprietà richieste.

Scelgo $A = \{\varphi_1 > \varphi_2\}$

$$\int_{\{\varphi_1 > \varphi_2\}} \varphi_1(t)\,\mathbb{P}_Y(dt) = \int_{Y^{-1}(\{\varphi_1 > \varphi_2\})} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\{\varphi_1 > \varphi_2\}} \varphi_2(t)\,\mathbb{P}_Y(dt)$$

$$\int_{\{\varphi_1 > \varphi_2\}} (\varphi_1 - \varphi_2)(t)\,\mathbb{P}_Y(dt) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_Y(\varphi_1 > \varphi_2) = 0$$

Analogamente $\mathbb{P}_Y(\varphi_1 < \varphi_2) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$ $\mathbb{P}_Y$- q.c.

La funzione $\varphi(t)$ si indica $\mathbb{E}[X \mid Y = t]$ e si chiama VALORE ATTESO DI X DATO CHE $Y = t$.

Supponiamo Y discreta $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j \in J}$

$$\int_{Y^{-1}(A)} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_A \varphi(t)\,\mathbb{P}_Y(dt) = \sum_{j:\, y_j \in A} \varphi(y_j)\,\mathbb{P}(Y = y_j)$$

$A = \{y_j\}$

$$\int_{\{Y = y_j\}} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \varphi(y_j)\,\mathbb{P}(Y = y_j)$$

$$\varphi(y_j) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_j)} \int_{\{Y = y_j\}} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \quad \forall j \in J$$

$$= \mathbb{E}[X \mid Y = y_j]$$

— o —

$$\mathbb{P}_{X,Y} = f(x,y)\,dx\,dy \implies \mathbb{P}_X = g(x)\,dx \qquad g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$$

$$\mathbb{P}_Y = h(y)\,dy \qquad h(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$$

$$\longrightarrow \int_A \varphi(t)\,\mathbb{P}_Y(dt) = \int_{Y^{-1}(A)} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\int_A \varphi(t)\,\mathbb{P}_Y(dt) = \int_A \varphi(t)\,h(t)\,dt$$

$$\int_{Y^{-1}(A)} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\underset{\{X \in \mathbb{R}\}}{\Omega} \cap \{Y \in A\}} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{(X,Y) \in \mathbb{R}\times A} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}\times A} x\,\mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_{\mathbb{R}\times A} x\,f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} x\,f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$\implies \int_A \varphi(t)\,h(t)\,dt = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} x\,f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$\int_A \varphi(y)\,h(y)\,dy = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} x\,f(x,y)\,dx \right) dy \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\implies \varphi(y)\,h(y) = \int_{\mathbb{R}} x\,f(x,y)\,dx \qquad \mathbb{P}_Y\text{-qc}$$

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} x \underbrace{\frac{f(x,y)}{h(y)}}_{\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}} dx \qquad \forall y \text{ t.c. } h(y) > 0$$

si indica col simbolo $f(x|y)$

e si chiama DENSITÀ di X DATO CHE $Y=y$

DISTRIBUZIONI SU $\mathbb{R}^2$

Definire una distribuzione AC su $\mathbb{R}^2$ equivale a definire una densità

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right)$$

1) $f(x,y) > 0 \Rightarrow$ Se $\mathbb{P}_{X,Y} = f(x,y)\,dx\,dy$, allora (X,Y) è distribuita su tutto $\mathbb{R}^2$.

2) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$ perché $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

$$f(x,y) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy}_{=1}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}_X = g(x)\,dx \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow \mathbb{P}_X = N(0,1)$

e $\mathbb{P}_Y = N(0,1)$ e X, Y sono indipendenti.

— o —

Considero $\sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$ e $\sigma_{12} \in \mathbb{R}$ t.c. la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$ sia definita positiva.

$$\det C = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 > 0$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

Considero $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x,y)\, C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

L'esponente è

$$\frac{-1}{2\det C}(x,y)\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\sigma_{12}\\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \frac{-1}{2\det C}\left(\sigma_2^2x^2-2\sigma_{12}xy+\sigma_1^2y^2\right)$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}}\exp\left(\frac{-(\sigma_2^2x^2-2\sigma_{12}xy+\sigma_1^2y^2)}{2\det C}\right)$$

1) $f(x,y)>0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$g(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x,y)\,dy=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}}\int_{\mathbb{R}}\exp\frac{-(\sigma_2^2x^2-2\sigma_{12}xy+\sigma_1^2y^2)}{2\det C}\,dy$$

$$\sigma_1^2y^2-2\sigma_{12}xy+\sigma_2^2x^2=(\sigma_1y)^2-2(\sigma_1y)\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}x\right)+\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}x\right)^2-$$

$$-\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}x\right)^2+\sigma_2^2x^2=$$

$$=\left(\sigma_1y-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}x\right)^2+x^2\,\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}=$$

$$=\left(\sigma_1y-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}x\right)^2+\frac{x^2}{\sigma_1^2}\det C$$

$$g(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(\frac{-\left(\sigma_1y-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}x\right)^2}{2\det C}\right)\cdot\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(\frac{-\left(\sigma_1y-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}x\right)^2}{2\det C}\right)dy$$

$$t=\frac{\sigma_1y-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}x}{\sqrt{2\det C}}\qquad dt=\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\det C}}\,dy$$

$$g(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\cancel{\det C}}}\,\frac{\sqrt{2\cancel{\det C}}}{\sigma_1}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right)\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\exp(-t^2)\,dt}_{\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right)\quad\Rightarrow\quad P_X=N(0,\sigma_1^2)$$

Analogamente $\quad P_Y=N(0,\sigma_2^2)$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}} \int_{\mathbb{R}^2} xy \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(\frac{-\left(\sigma_1 y - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} x\right)^2}{2 \det C}\right) dx\, dy$$