# V.A MULTIVARIATE (o V.A. VETTORIALI)

Note Title 26/10/2017

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discrete

$(X,Y) : \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$ è una funzione con immagine discreta

$\{x_i\}_{i \in I} = X(\Omega) \qquad \{y_j\}_{j \in J} = Y(\Omega)$

$(X,Y)(\Omega) \subseteq X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$\forall (x_i, y_j) \in (X,Y)(\Omega) \qquad \{X = x_i, Y = y_j\} = \{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}$

$\Rightarrow$ è un evento

$p_{ij} := \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \qquad (i,j) \in I \times J$

densità discreta congiunta di $X$ e $Y$ nel punto $(x_i, y_j)$

$\forall i \in I \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} p_{ij}$

$\forall j \in J \quad \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij}$

CONTROESEMPIO

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{L}^1)$

$E, F \in \mathcal{B}([0,1]) \qquad X = \mathbb{1}_E \qquad Y = \mathbb{1}_F$

<u>1° caso</u> $\qquad E = [0, \frac{1}{2}] \qquad F = [0, \frac{1}{3}]$

$X_1 = \mathbb{1}_E \qquad Y_1 = \mathbb{1}_F$

$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{1}{3}$

$(X_1, Y_1) \qquad (1,1) \quad (0,1) \quad (1,0) \quad (0,0)$

$\mathbb{P}(X_1 = 1, Y_1 = 1) = \frac{1}{3}$

$\{X_1 = 1, Y_1 = 1\} = E \cap F = F$

$\mathbb{P}(X_1 = 0, Y_1 = 1) = \mathbb{P}\left( (\frac{1}{2}, 1] \cap [0, \frac{1}{3}] \right) = 0$

$$\mathbb{P}(X_1=1, Y_1=0) = \mathbb{P}\left([0,\tfrac{1}{2}]\cap(\tfrac{1}{3},1]\right) = \mathbb{P}\left((\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}]\right) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(X_1=0, Y_1=0) = \mathbb{P}\left((\tfrac{1}{2},1]\cap(\tfrac{1}{3},1]\right) = \mathbb{P}\left((\tfrac{1}{2},1]\right) = \frac{1}{2}$$

2° CASO $\quad E = [0,\frac{1}{2}] \qquad F = [\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$

$\quad X_2 = \mathbb{1}_E \qquad Y_2 = \mathbb{1}_F$

$\mathbb{P}(X_2=1) = \mathbb{P}(X_1=1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(Y_2=1) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2} = B(\frac{1}{2}) \qquad \mathbb{P}_{Y_2} = \mathbb{P}_{Y_1} = B(\frac{1}{3})$

$$\mathbb{P}(X_2=1, Y_2=1) = \mathbb{P}(E\cap F) = \mathbb{P}\left([0,\tfrac{1}{2}]\cap[\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}]\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left([\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}]\right) = \frac{1}{6}$$

— o —

Sia $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \omega\in\Omega \mapsto (X_1(\omega) \ldots X_n(\omega))\in\mathbb{R}^n$ un'applicazione.
Dico che $X$ è una v.a. vettoriale o una v.a. multivariata se

$$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \qquad \{\omega\in\Omega : X(\omega)\in A\}\in\mathcal{E}$$

$$X^{-1}(A) \qquad \{X\in A\}$$

Si può dimostrare che una funzione
$X : \omega\in\Omega \longmapsto X(\omega) = (X_1(\omega) \ldots X_n(\omega))\in\mathbb{R}^n$
è una v.a. multivariata se e solo se tutte le sue componenti sono v.a. scalari.

$\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \{X\in A\}\in\mathcal{E} \Rightarrow$ è ben definita $\mathbb{P}(X\in A)$
$\Rightarrow$ è ben definita una funzione
$$\mathbb{P}_X : A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{P}(X\in A)\in\mathbb{R}$$
Come nel caso scalare si dimostra che
$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio probabilizzato

La misura di probabilità $\mathbb{P}_X$ si dice DISTRIBUZIONE CONGIUNTA di $X = (X_1 \_\_ X_n)$

Le distribuzioni $\mathbb{P}_{X_1}, \mathbb{P}_{X_2}, \_\_ \mathbb{P}_{X_n}$ delle componenti $X_1, X_2, \_\_ X_n$ di $X$ si dicono DISTRIBUZIONI MARGINALI

La funzione $F_X : t = (t_1 \_\_ t_n) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}(X_1 \le t_1, \dots X_n \le t_n) \in \mathbb{R}$ si dice LEGGE CONGIUNTA DI $X_1 \_\_ X_n$

OSS Nota la distribuzione congiunta conosco anche le distribuzioni marginali:

$X = (X_1 \_\_ X_n) \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathbb{P}(X_1 \in A) = \mathbb{P}_{X_1}(A)$

$\{X_1 \in A\} = \{X_1 \in A\} \cap \underbrace{\Omega \cap \Omega \dots \cap \Omega}_{(n-1) \text{ volte}}$

$= \{X_1 \in A\} \cap \{X_2 \in \mathbb{R}\} \cap \{X_3 \in \mathbb{R}\} \dots \cap \{X_n \in \mathbb{R}\} =$

$= \{X_1 \in A, X_2 \in \mathbb{R}, \dots, X_n \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{P}_{X_1}(A) = \mathbb{P}(X_1 \in A) = \mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in \mathbb{R}, \dots X_n \in \mathbb{R})$

$= \mathbb{P}_{(X_1 \_\_ X_n)}(A \times \mathbb{R} \times \dots \mathbb{R}) = \mathbb{P}_X(A \times \mathbb{R}^{n-1})$

$F_{X_1}(t_1) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1) = \mathbb{P}_{X_1}((-\infty, t_1]) = \mathbb{P}_X((-\infty, t_1] \times \mathbb{R}^{n-1})$

$\underset{\mathbb{R}}{\cap} \quad = \lim_{k \to +\infty} F_X(t_1, k, \_\_ k)$

TEO Sia $X = (X_1 \_\_ X_n)$ v.a. multivariata su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione di Borel nonnegativa.

$$\int_\Omega \varphi \circ (X_1(\omega) \_\_ X_n(\omega)) \, \mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t_1 \_\_ t_n) \, \mathbb{P}_X(dt_1 \_\_ dt_n)$$

**TEOREMA** Sia $X = (X_1 \ldots X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funzione di Borel

Sia $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funzione di Borel non negative.

Allora la funzione $\varphi \circ X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ è una v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

e
$$\int_{\mathbb{R}^k} \psi(s_1 \ldots s_k) \mathbb{P}_{\varphi \circ X}(ds_1 \ldots ds_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\varphi(t_1 \ldots t_n)) \mathbb{P}_X(dt_1 \ldots dt_n)$$

**COROLLARIO** Siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Allora
$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(s_1 \ldots s_n) \mathbb{P}_{X+Y}(ds_1 \ldots ds_n) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \psi(t_1 + u_1, \ldots, t_n + u_n) \mathbb{P}_{(X,Y)}(dt_1 \ldots dt_n\, du_1 \ldots du_n)$$

$\forall \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione di Borel non negativa.

**DIM** $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^{2n}$

$\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto x + y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(s_1 \ldots s_n) \mathbb{P}_{X+Y}(ds_1 \ldots s_n) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \psi(t_1 + u_1 \ldots, t_n + u_n) \mathbb{P}_{(X,Y)}(dt_1 \ldots dt_n\, du_1 \ldots du_n)$$

Scegliamo $\psi = \mathbb{1}_A$ $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(s_1 \ldots s_n) \mathbb{P}_{X+Y}(ds_1 \ldots ds_n) = \mathbb{P}(X + Y \in A)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathbb{1}_A(t_1 + u_1 \ldots t_n + u_n) \mathbb{P}_{(X,Y)}(dt_1 \ldots dt_n) =$$

$$= \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{(t, u) \in \mathbb{R}^{2n} : t + u \in A\})$$

— o —

Una distribuzione $\mathbb{P}_X$ su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ si dice A.C. se

$\exists f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non negativa e di Borel t.c.

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x)\, dx = \int_A f(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Si scrive $\mathbb{P}_X = f(x)\, dx$

Come nel caso scalare si dimostra che $\mathbb{P}_X = f(x)\,dx$ se e solo se

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1 \ldots x_n)\, \mathbb{P}_X(dx_1 \ldots dx_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1 \ldots x_n) f(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

—— o ——

TEO Siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Allora $\mathbb{E}[|XY|] \leq \left(\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]\right)^{1/2}$

DIM Se $\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2] = +\infty$

Se $\mathbb{E}[X^2]$ o $\mathbb{E}[Y^2] = 0 \Rightarrow X = 0$ q.c. o $Y = 0$ q.c.

$\Rightarrow XY = 0$ q.c. $\mathbb{E}[|XY|] = 0$

Supponiamo $\mathbb{E}[X^2]$ e $\mathbb{E}[Y^2]$ siano finiti non nulli

Considero

$$a(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}} \qquad b(\omega) = \frac{|Y(\omega)|}{\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}}$$

$$(a(\omega) - b(\omega))^2 \geq 0 \qquad a^2(\omega) + b^2(\omega) \geq 2a(\omega)b(\omega)$$

$$\int_\Omega 2\frac{|X(\omega)|\,|Y(\omega)|}{\sqrt{\mathbb{E}[X^2]\cdot\mathbb{E}[Y^2]}}\,\mathbb{P}(d\omega) \leq \int_\Omega \left(\frac{X^2(\omega)}{\mathbb{E}[X^2]} + \frac{Y^2(\omega)}{\mathbb{E}[Y^2]}\right)\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\frac{2\,\mathbb{E}[|XY|]}{\left(\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]\right)^{1/2}} \leq \frac{1}{\mathbb{E}[X^2]}\mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{\mathbb{E}[Y^2]}\mathbb{E}[Y^2] = 2$$

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \left(\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]\right)^{1/2}$$

COROLLARIO $\quad \left|\mathbb{E}[XY]\right| \leq \mathbb{E}[|XY|] \leq \left(\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]\right)^{1/2}$

$Y = 1$ v.a. costante $\quad |\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

## COVARIANZA

Siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X^2]$ e $\mathbb{E}[Y^2]$ entrambi finiti.

Pongo $Cov(X,Y) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

Se $Cov(X,Y)=0$, dico che $X$ e $Y$ sono v.a. SCORRELATE

PROPRIETÀ ① $Cov(X,X) = Var[X]$

② $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

DIM $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] =$

$= \mathbb{E}[XY - \mathbb{E}[X]Y - \mathbb{E}[Y]X + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]]$

$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \cancel{- \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X]} \cancel{+ \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$

③ $Cov(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha\gamma \, Cov(X,Y) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

DIM PER ESERCIZIO

④ $Cov(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$= \int_{\mathbb{R}^2} (x-\mathbb{E}[X])(y-\mathbb{E}[Y]) \, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy)$

DIM $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$XY = f \circ (X,Y) \qquad f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy \in \mathbb{R}$

$\mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy)$

$\Rightarrow Cov(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

⑤ $|Cov(X,Y)| \le \sqrt{Var[X]\,Var[Y]}$

$\tilde{X} = X - \mathbb{E}[X] \qquad \tilde{Y} = Y - \mathbb{E}[Y]$

$|\mathbb{E}[\tilde{X}\tilde{Y}]| \le \mathbb{E}[|\tilde{X}\tilde{Y}|] \le \left(\mathbb{E}[\tilde{X}^2]\mathbb{E}[\tilde{Y}^2]\right)^{1/2}$

$$|Cov(X,Y)| \leq (Var[X]\, Var[Y])^{1/2}$$

⑥ $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2\,Cov(X,Y)$

Più in generale se $X_1 \dots X_n$ sono v.a. $E[X_i^2] < +\infty$ $\forall i = 1 \dots n$ allora

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + 2 \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

$$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n}$$

$$Var[X+Y] = E\left[\left(X+Y - E[X+Y]\right)^2\right] =$$
$$= E\left[\left(X+Y - E[X] - E[Y]\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left((X - E[X]) + (Y - E[Y])\right)^2\right] =$$
$$= E\left[(X - E[X])^2 + (Y - E[Y])^2 + 2(X - E[X])(Y - E[Y])\right]$$
$$= Var[X] + Var[Y] + 2\,Cov(X,Y)$$

## COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

Siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ t.c. $E[X^2]$ e $E[Y^2]$ sono finiti e $Var[X]$, $Var[Y]$ non sono nulle.

Chiamiamo COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE di $X$ e $Y$ il rapporto

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X]\, Var[Y]}}$$

$$\Rightarrow |Corr(X,Y)| \leq 1$$

Si può dimostrare che

$Corr(X,Y) = 1 \iff X = \alpha Y + \beta \quad \alpha > 0 \quad \beta \in \mathbb{R}$

$Corr(X,Y) = -1 \iff X = \alpha Y + \beta \quad \alpha < 0, \quad \beta \in \mathbb{R}$

## V.A. INDIPENDENTI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. Siano $A, B \in \mathcal{E}$ si dicono INDIPENDENTI se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Date $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $Y: \Omega \to \mathbb{R}^m$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ dico che $X$ e $Y$ sono v.a. indipendenti se

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

cioè $E = X^{-1}(A)$ $F = Y^{-1}(B)$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ sono eventi indipendenti di $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(A \times B) = \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}_X(A)\,\mathbb{P}_Y(B)$$

$$\mathcal{J} = \{A \times B : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$$

Un'altra condizione equivalente è la seguente
$\forall \varphi : (x,y) \in \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}_{\mathbb{R}^{n+m}} \to \varphi(x,y)$ di Borel nonnegativa

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi(x,y)\,\mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x,y)\,\mathbb{P}_Y(dy) \right) \mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,y)\,\mathbb{P}_X(dx) \right) \mathbb{P}_Y(dy)$$

$$F_{X,Y}(t,s) = \mathbb{P}(X \le t, Y \le s) = \mathbb{P}(X \le t)\mathbb{P}(Y \le s) = F_X(t)F_Y(s)$$

**PROP** Siano $X, Y$ v.a. indipendenti su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$
$X: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $Y: \Omega \to \mathbb{R}^m$.
Siano $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^h$ e $\beta: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ di Borel.

Allora $\alpha \circ X : \Omega \to \mathbb{R}^l$ e $\beta \circ Y : \Omega \to \mathbb{R}^k$

sono v.a. indipendenti.

DIM Siano $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$ $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

$$\mathbb{P}(\alpha \circ X \in A, \beta \circ Y \in B) = \mathbb{P}(X \in \alpha^{-1}(A), Y \in \beta^{-1}(B))$$
$$= \mathbb{P}(X \in \alpha^{-1}(A))\, \mathbb{P}(Y \in \beta^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\alpha \circ X \in A)\, \mathbb{P}(\beta \circ Y \in B)$$

## VALORE ATTESO DEL PRODOTTO DI V.A. INDIPENDENTI

Siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c.

1) $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$ esistono e sono finiti

2) $X$ e $Y$ sono indipendenti

Allora $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$

In particolare 1) $Cov(X,Y) = 0$ cioè $X$ e $Y$ sono scorrelate

2) $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.

DIM $$\mathbb{E}[|XY|] = \int_{\mathbb{R}^2} |xy|\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |xy|\, \mathbb{P}_X(dx) \right) \mathbb{P}_Y(dy) = \qquad |xy| = |x| \cdot |y|$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |y|\,|x|\, \mathbb{P}_X(dx) \right) \mathbb{P}_Y(dy) = \int_{\mathbb{R}} |y|\, \mathbb{E}[|X|]\, \mathbb{P}_Y(dy)$$

$$= \mathbb{E}[|X|]\, \mathbb{E}[|Y|] \implies \mathbb{E}[XY] \text{ esiste finito}$$

Posso ripetere gli stessi conti con la funzione $xy$ al posto di $|xy|$ e ottengo $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.

## FAMIGLIE DI V.A. INDIPENDENTI

Sia $X_1 \ldots X_n$ una famiglia finita di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Si dice che $X_1 \ldots X_n$ è una famiglia di v.a. indipendenti se

$X_1^{-1}(A_1) \ldots X_n^{-1}(A_n)$ sono eventi indipendenti

$\forall A_1 \ldots A_n$ boreliani

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.
Dico che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di v.a. indipendenti
se $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_1 \ldots X_n$ sono v.a. indipendenti.

— o —

$B(n,p)$ $\quad \{0, \ldots n\}$ $\quad B(n,p)(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$\forall k = 0, \ldots n$

$\mathbb{P}_X = B(n,p)$ $\quad \mathbb{E}[X] = np$
$\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$

$\Omega = \{0,1\}^n$ $\quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = ?$
$\overline{\omega} = (\overline{\omega}_1 \ldots \overline{\omega}_n)$

$$\mathbb{P}(\omega_1 = \overline{\omega}_1)\,\mathbb{P}(\omega_2 = \overline{\omega}_2) \ldots \mathbb{P}(\omega_n = \overline{\omega}_n) = p^k (1-p)^{n-k}$$

$k = \#$ componenti di $\overline{\omega}$ che valgono 1

$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ è la v.a. che conta quante Teste escono in $n$ lanci

Abbiamo visto che $\mathbb{P}_X = B(n,p)$

$X_i(\omega) = \omega_i$ $\quad i = 1 \ldots n$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \implies \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[X_i]}_{p} = np$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] + 2\sum_{i<j} \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}_{=0 \text{ per l'indipendenza}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

# DISTRIBUZIONE DELLA SOMMA DI V.A. INDIPENDENTI

1) $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. indipendenti

$$X(\Omega),\ Y(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$$

$$p_k = \mathbb{P}(X=k) \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$q_k = \mathbb{P}(Y=k) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$(X+Y)(\Omega) \in \mathbb{Z}$$

$k \in \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{P}(X+Y=k)$

$$\{X+Y=k\} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{X=j,\ X+Y=k\} =$$
$$= \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{X=j,\ Y=k-j\}$$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \{X=j, Y=k-j\}\Big) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X=j, Y=k-j)$$
$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j\, q_{k-j}.$$

2) Siano $X$ e $Y$ v.a. indipendenti, entrambe con distribuzione A.C.

$$\mathbb{P}_X = f(x)\,dx \qquad\qquad \mathbb{P}_Y = g(y)\,dy$$

$(X,Y)$ ha distribuzione A.C. con $\mathbb{P}_{X,Y} = f(x)g(y)\,dx\,dy$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X\in A)\mathbb{P}(Y \in B) = \Big(\int_A f(x)\,dx\Big)\Big(\int_B g(y)\,dy\Big)$$
$$= \int_{A\times B} f(x)\,g(y)\,dx\,dy$$

$$Z := X+Y$$

$$\mathbb{P}(X+Y \in A) = \mathbb{P}_{X+Y}(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(z)\,\mathbb{P}_{X+Y}(dz) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x+y)\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x+y) f(x) g(y)\, dx\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y) g(y)\, dy \right) dx$$

$x + y = t$

$y = t - x$

$dy = dt$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t) g(t-x)\, dt \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(t) f(x) g(t-x)\, dt\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t) \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) g(t-x)\, dx \right) dt = \int_A \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) g(t-x)\, dx \right) dt$$

$$\mathbb{P}(X+Y \in A) = \int_A h(t)\, dt \qquad h(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x) g(t-x)\, dx$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{X+Y} = h(t)\, dt$$

---

Es 6 foglio 3

$$f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \exp(-|x|)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{+\infty} \exp(-x)\, dx = -\exp(-x) \Big|_{x=0}^{x \to +\infty} = 0 - (-1) = 1$$

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{\mathbb{R}} |x| f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |x| \exp(-|x|)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x}\, dx < +\infty$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} x e^{-|x|}\, dx = 0$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{2} e^{-|x|}\,dx =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2} \int_0^{+\infty} \underset{f}{x^2}\, \underset{g'}{e^{-x}}\,dx = x^2(-e^{-x})\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x}\,dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx = 2\cdot 1 = 2$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 2$$

$$Y := \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\mathrm{Var}[X]} = \frac{X}{2} = aX + b \qquad a = \frac{1}{2} \quad b = 0$$

$$\mathbb{P}_Y = g(x)\,dx \qquad g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right) \qquad f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$g(x) = 2\,\frac{1}{2} \exp\left(-\left|\frac{x-0}{\frac{1}{2}}\right|\right) = \exp(-2|x|)$$

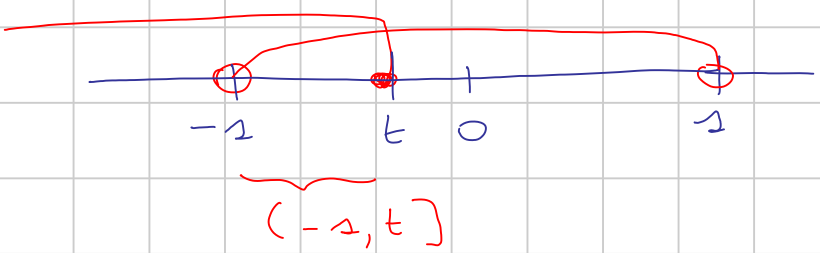
Es 8 foglio 3

$$\mathbb{P}_X = N(0,1) \qquad Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & -1 < X(\omega) < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y \le t)$$

$t \le -1$ $\quad \{Y \le t\} = \emptyset \Rightarrow F_Y(t) = 0$

$t \in (-1,0)$ $\quad \{Y \le t\} = \{X \in (-1,1),\ X \le t\} =$




$$= \{-1 < X \le t\}$$

$$= \{X \le t\} \setminus \{X \le -1\} =$$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(-1 < X \le t)$$

$$= \mathbb{P}(X \le t) - \mathbb{P}(X \le -1)$$

$$= \Phi(t) - \Phi(-1)$$

$$= (1 - \Phi(-t)) - (1 - \Phi(1))$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-t)$$

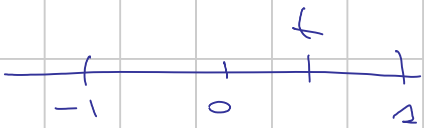
$$\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$$

$t=0 \qquad F_Y(0) = \mathbb{P}(Y\le 0)$

$$\{Y\le 0\} = \{X\notin(-1,1)\}\cup\{X\in(-1,1),\ X\le 0\} =$$
$$= \{X\le -1\}\cup\{X\ge 1\}\cup\{-1<X\le 0\} =$$
$$= \{X\le 0\}\cup\{X\ge 1\}$$

$$F_Y(0) = \mathbb{P}(Y\le 0) = \mathbb{P}(X\le 0)+\mathbb{P}(X\ge 1) =$$
$$= \mathbb{P}(X\le 0)+1-\mathbb{P}(X<1)$$
$$= \Phi(0)+1-\Phi(1) = \frac{3}{2}-\Phi(1)$$

$t\in(0,1) \qquad F_Y(t) = \mathbb{P}(Y\le t)$




$$\{Y\le t\} = \{X\notin(-1,1)\}\cup\{X\in(-1,1),\ X\le t\} =$$
$$= \{X\le -1\}\cup\{X\ge 1\}\cup\{-1<X\le t\}$$
$$= \{X\le t\}\cup\{X\ge 1\}$$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(X\le t)+\mathbb{P}(X\ge 1) = \mathbb{P}(X\le t)+1-\mathbb{P}(X<1)$$
$$= \Phi(t)+1-\Phi(1)$$

$t\ge 1 \qquad F_Y(t) = \mathbb{P}(Y\le t) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t<-1 \\ \Phi(1)-\Phi(-t) & -1\le t<0 \\ \Phi(t)+1-\Phi(1) & 0\le t<1 \\ 1 & t\ge 1 \end{cases}$$

$F_Y(0) = \frac{3}{2}-\Phi(1)$

$F_Y(0^-) = \Phi(1)-\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}-\Phi(1) = \Phi(1)-\frac{1}{2}$

$2\Phi(1) = 2 \qquad \Phi(1)=1$ IMPOSSIBILE