# CONVERGENZA DOMINATA. PROBABILITÀ

Note Title 05/10/2017

http://www.dma.unifi.it/~poggiolini

$(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$

$f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \{x \in \Omega : f(x) \leq t\} \in \mathcal{E}$ FUNZIONE MISURABILE

FUNZIONI SEMPLICI $\quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}(x) \quad E_i \in \mathcal{E}$

$f$ funzione semplici non negativa

$$\int_\Omega f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i)$$

$f$ misurabile non negativa $\int_\Omega f(x)\mu(dx) =$

$$= \sup\left\{\int_\Omega \varphi(x)\mu(dx) : \varphi \text{ funzione semplice } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x)\right\}$$

$f$ misurabile $\qquad f = f^+ - f^-$

$$\int_\Omega f^+(x)\mu(dx) \qquad \int_\Omega f^-(x)\mu(dx)$$

Se almeno uno dei due integrali è finito pongo

$$\int_\Omega f(x)\mu(dx) := \int_\Omega f^+(x)\mu(dx) - \int_\Omega f^-(x)\mu(dx)$$

Se $\int_\Omega f^+(x)\mu(dx)$ e $\int_\Omega f^-(x)\mu(dx)$ sono entrambi

finiti dico che $f$ è una funzione sommabile

Se almeno uno tra $\int_\Omega f^+(x)\mu(dx)$ e $\int_\Omega f^-(x)\mu(dx)$ è finito, dico che $f$ è una funzione integrabile

## TEOREMA DI BEPPO LEVI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ spazio di misura.

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c.

1) le $f_n$ sono funzioni misurabili non negative

2) $\forall x \in \Omega \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

Allora la funzione $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ è misurabile e

$$\int_\Omega f(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx)$$

DIM $\quad 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x\in\Omega \qquad f_n(x) \leq f(x)$

$$\int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx) \leq \int_\Omega f_{n+1}(x)\,\mu(dx) \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx) \leq \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$$

Sia $\alpha := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx)$ $\qquad$ Se $\alpha = +\infty$, va bene

Se $\alpha \in [0, +\infty)$, considero $\beta \in (0,1)$

$\varphi$ funzione semplice $\quad 0 \leq \varphi \leq f$

$$A_n = \{x \in \Omega : \beta\varphi(x) \leq f_n(x)\}$$

$A_n \subseteq A_{n+1}$

$A_n \in \mathcal{E}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$

$$\beta \int_\Omega \varphi(x) \mathbb{1}_{A_n}(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega \beta\varphi(x)\mathbb{1}_{A_n}(x)\,\mu(dx) \quad (\star)$$

Se $x \in A_n \quad \beta\varphi(x)\mathbb{1}_{A_n}(x) = \beta\varphi(x) \leq f_n(x)$

Se $x \notin A_n \quad \beta\varphi(x)\mathbb{1}_{A_n}(x) = 0 \leq f_n(x)$

$$\textcircled{\ast} \leq \int_\Omega f_n(x)\mu(dx)$$

Per $\beta \to 1^-$ $\quad \int_\Omega \varphi(x) 1\!\!1_{A_n}(x)\mu(dx) \leq \int_\Omega f_n(x)\mu(dx) \leq \alpha$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i 1\!\!1_{E_i}(x) \qquad \varphi(x)1\!\!1_{A_n}(x) = \sum_{i=1}^k c_i 1\!\!1_{E_i}(x) 1\!\!1_{A_n}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^k c_i 1\!\!1_{E_i \cap A_n}(x)$$

$$\int_\Omega \varphi(x) 1\!\!1_{A_n}(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^k c_i \mu(E_i \cap A_n)$$

$$\sum_{i=1}^k c_i \mu(E_i \cap A_n) \leq \alpha \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$A_n \subseteq A_{n+1} \quad \bigcup A_n = \Omega \quad B_n := E_i \cap A_n \Rightarrow B_n \subseteq B_{n+1}$$

$$\bigcup B_n = E_i$$

$\forall i = 1 \dots k \qquad \mu(E_i \cap A_n) \longrightarrow \mu(E_i)$ per $n \to +\infty$

$$\sum_{i=1}^k c_i \mu(E_i) \leq \alpha$$

$$\shortparallel$$

$$\int_\Omega \varphi(x)\mu(dx) \qquad \forall \varphi \text{ semplice t.c. } 0 \leq \varphi \leq f$$

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x)\mu(dx) \leq \alpha = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\mu(dx)$$

OSSERVAZIONE L'ipotesi $f_n(x) \geq 0$ si può sostituire con l'ipotesi $f_n(x) \geq \phi(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \Omega$ e $\phi$ funzione sommabile.

$$g_n := f_n - \phi$$

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$

Definisco $\min\lim_{n\to\infty} a_n$ o anche $\liminf_{n\to\infty} a_n$

il $\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$ $\qquad b_n := \inf_{k\geq n} a_k$

$b_n \leq b_{n+1}$

$\Downarrow$

$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$

Definisco $\max\lim_{n\to\infty} a_n$ o $\limsup_{n\to\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$ $\qquad c_n := \sup_{k\geq n} a_k$

$c_n \geq c_{n+1}$

$\Downarrow$

$\exists \lim_{n\to\infty} c_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} c_n$

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad \inf_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq n} a_k$

$\Downarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

PROPRIETÀ $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste SSE $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ e in tal caso assume lo stesso valore.

LEMMA DI FATOU

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c.

1) le $f_n$ sono integrabili

2) $\exists f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile t.c. $f_n(x) \geq f(x)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall x\in\Omega$

Sia $f(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad x \in \Omega$

Allora $\displaystyle\int_\Omega f(x)\mu(dx) \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\mu(dx)$

DIM. Slg posso supporre $f_n \geq 0$

Per $k \in \mathbb{N}$ pongo $g_k(x) = \inf_{n\geq k} f_n(x)$

$\forall x \in \Omega \ \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \le g_k(x) \le g_{k+1}(x)$

$g_k(x) \le f_n(x)$ se $n \geq k$

$$0 \le \int_\Omega g_k(x)\mu(dx) \le \int_\Omega g_{k+1}(x)\mu(dx)$$

$$\int_\Omega g_k(x)\mu(dx) \le \int_\Omega f_n(x)\mu(dx) \quad \text{se } n \geq k$$

$$\Rightarrow \int_\Omega g_k(x)\mu(dx) \le \inf_{n\geq k}\int_\Omega f_n(x)\mu(dx)$$

Applico Beppo Levi alle $g_k$

$$\int_\Omega \lim_{k\to\infty} g_k(x)\mu(dx) = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_k(x)\mu(dx) \le \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k}\int_\Omega f_n(x)\mu(dx)$$

$$\|$$

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx)$$

- Se $\exists\, \varphi$ sommabile t.c. $f_n(x) \le \varphi(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \Omega$

allora $\displaystyle\int_\Omega \limsup f_n(x)\mu(dx) \geq \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\mu(dx)$

$f_n \geq f$ $$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mu(dx) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx)$$

$f_n \leq f$ $$\int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\,\mu(dx) \geq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx)$$

Supponiamo che $\exists \varphi$ funzione sommabile t.c.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \Omega$ $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$

Supponiamo che $\forall x \in \Omega$ $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx) \leq \int_\Omega f(x)\,\mu(dx) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$$

## TEOREMA DI CONVERGENZA DOMINATA DI LEBESGUE

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ uno spazio di misura
Sia $\varphi: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione sommabile.
Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ t.c.
1) le $f_n$ sono misurabili.
2) $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \Omega$
3) $\forall x \in \Omega$ $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Allora le $f_n$ sono sommabili e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$$

e $$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\,\mu(dx) = 0$$

Dado $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Moneta $\Omega = \{T, C\}$

Due dadi: $\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$\omega \in \Omega \quad \mathbb{P}(\{\omega\})$

Sia $\Omega$ insieme non vuoto e sia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una $\sigma$-algebra di $\Omega$. Sia $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, +\infty)$.

Dico che $\mathbb{P}$ è una probabilità su $(\Omega, \mathcal{E})$

se: • $\mathbb{P}$ è una misura su $(\Omega, \mathcal{E})$ $(*)$

• $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

$\phi \in \mathcal{E}$

$A \in \mathcal{E} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{E}$

$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{E}$

$\Downarrow$

$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{E}$

$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E} \quad A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$

— o —

$A \in \mathcal{E}$ si dice EVENTO

$\Omega$ si dice EVENTO CERTO

Se $A \in \mathcal{E}$ e $\mathbb{P}(A) = 1$, $A$ si dice EVENTO QUASI CERTO

$\Omega = [0,1]$ $\quad \mathcal{E}$ = insiemi di Lebesgue che sono contenuti in $[0,1]$

$\mathbb{P} = \mathcal{L}|_{\mathcal{E}}$

$A = (0,1) \qquad A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$

L'insieme vuoto si dice EVENTO IMPOSSIBILE

Se $A \in \mathcal{E}$ e $\mathbb{P}(A) = 0$, $A$ si dice EVENTO QUASI IMPOSSIBILE

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ si dice SPAZIO PROBABILIZZATO

PROPRIETÀ

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato.

1) $\mathbb{P}(A) \in [0,1] \quad \forall A \in \mathcal{E}$

$\Omega = A \cup (\Omega \setminus A) \cup \phi \cup \phi \cup \phi \dots$

$A_1 = A \quad A_2 = \Omega \setminus A \quad A_i = \phi \quad \forall i \geq 3$

$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(\Omega \setminus A)}_{\geq 0} + \cancel{\sum_{i=3}^{\infty} \mathbb{P}(\phi)}^{=0} \geq \mathbb{P}(A)$

2) $A, B \in \mathcal{E}$ t.c. $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$

In particolare $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$

3) $A, B \in \mathcal{E} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

4) $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $\{D_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una famiglia finita o numerabile di eventi.

$\mathcal{I} = \{1 \dots N\} \quad \mathcal{I} = \mathbb{N}$

Dico che $\{D_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ è una partizione di $\Omega$ in eventi se

$D_i \in \mathcal{E} \quad \forall i \in \mathcal{I}$

$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} D_i = \Omega$

$D_i \cap D_j = \phi \qquad \forall i, j \in \mathcal{I} \quad i \neq j$

PROPOSIZIONE Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $\{D_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una partizione di $\Omega$ in eventi.

Allora

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{P}(A \cap D_i) \qquad \forall A \in \mathcal{E}$$

Dim

$A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{i \in \mathcal{I}} D_i = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (A \cap D_i)$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left( \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (A \cap D_i) \right) \qquad (A \cap D_i) \cap (A \cap D_j) = \phi$

$= \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{P}(A \cap D_i)$

# CONTINUITÀ DELLA MISURA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di eventi.

1) Se $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$

2) Se $A_n \supseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$

<u>DIM di 1)</u>

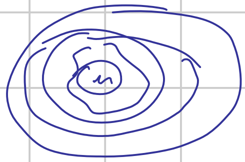
$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$B_3 = A_3 \setminus A_2$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus A_{n-1} \quad n \geq 2$



$B_i \cap B_j = \emptyset \quad i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})\right) = \cancel{\mathbb{P}(A_1)} + \left(\cancel{\mathbb{P}(A_2)} - \cancel{\mathbb{P}(A_1)}\right) \cancel{+} \dots$$

$$+ \left(\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})\right) + \dots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

perché $A_{n-1} \subseteq A_n$

— o —

Sia $\Omega$ insieme non vuoto e sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ famiglia di sottoinsiemi di $\Omega$. Dico che $\mathcal{A}$ è un ANELLO su $\Omega$ se:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ B \setminus A,\ A \setminus B \in \mathcal{A}$

Sia $\Omega$ insieme non vuoto e sia $\mathcal{A}$ un anello su $\Omega$.

Sia $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty)$.

Dico che $\mu$ è una funzione $\sigma$-additiva su $\mathcal{A}$ se:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ t.c. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

allora $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Dico che $\mu$ è $\sigma$-finita se è $\sigma$-additiva e se $\exists \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ t.c. $\mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$

## TEOREMA DI CARATHÉODORY

Sia $\Omega$ insieme non vuoto e sia $\mathcal{A}$ un anello di $\Omega$.
Sia $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una funzione $\sigma$-additiva.
Allora $\mu$ può essere estesa ad una misura definita sulla $\sigma$-algebra generata da $\mathcal{A}$.
L'estensione è unica se $\mu$ è $\sigma$-finita.