

Esercizi 1 - Probabilità elementare

Esercizio 1 (Paradosso dei compleanni). N amici partecipano ad una festa. Calcolare la probabilità $p(N)$ che essi festeggino il proprio compleanno in N giorni distinti dell'anno. (Supponiamo che tutti gli anni abbiano 365 giorni e che le date di nascita siano tutte equiprobabili).

Provare che $p: N \in \{1, 2, \dots, 365\} \rightarrow p(N)$ è strettamente decrescente e determinare il primo valore di N per cui $p(N) < \frac{1}{2}$.

Esercizio 2. Si gioca a poker con le carte dall'asso al 7. Calcolare la probabilità di avere un poker servito e la probabilità di avere un colore servito.

Esercizio 3. Un'urna contiene 10 palline bianche, 8 palline rosse e 12 palline nere. Si estraggono 4 palline. Calcolare la probabilità di estrarre:

1. una pallina bianca, 2 palline rosse e una pallina nera, nel caso in cui si reimbussoli tra una estrazione e l'altra;
2. una pallina bianca, 2 palline rosse e una pallina nera, nel caso in cui non si reimbussoli tra una estrazione e l'altra.

Esercizio 4. Su una scacchiera $n \times n$ si dispongono n pedine (in riquadri distinti). Calcolare la probabilità che ogni riga e che ogni colonna contenga al più una pedina.

Esercizio 5. Un'urna contiene n palline, di cui 5 sono rosse. Si estraggono contemporaneamente due palline. Fissato $\alpha \in (0, 1)$, calcolare il minimo valore di $n = n(\alpha)$ per cui la probabilità che siano entrambe rosse è inferiore ad α .

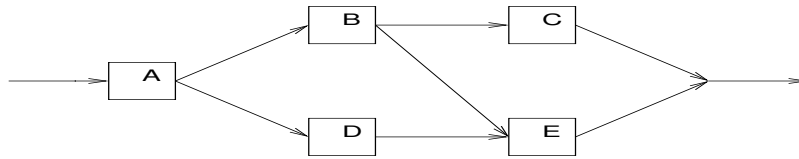
Esercizio 6. Una cesta contiene 100 mele verdi ed 100 mele rosse. Un macchinario estrae dalla cesta 100 mele. Calcolare la probabilità che vengano estratte 50 mele rosse e 50 mele verdi.

Esercizio 7. Si scelgono due punti a caso sull'intervallo $[0, 1]$. Calcolare la probabilità che i tre segmenti in cui risulta diviso l'intervallo siano i lati di un triangolo.

Esercizio 8. IMPORTANTE!!! Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia B un evento tale che $\mathbb{P}(B) > 0$. Per ogni $A \in \mathcal{E}$ poniamo $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$. Dimostrare che $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}_B)$ è ancora uno spazio probabilizzato.

Esercizio 9. In un club sportivo il 70% degli iscritti gioca a tennis, il 60% degli iscritti gioca a golf e il 40% pratica atletica leggera. Sapendo che tutti gli iscritti praticano almeno uno sport e che nessuno degli iscritti pratica tre sport, calcolare la percentuale di iscritti che pratica due attività.

Esercizio 10. Si considero un sistema come in figura. Supponendo di conoscere la probabilità di funzionamento di ciascun sottosistema e che i sottosistemi siano indipendenti, calcolare la probabilità che il sistemi funzioni.



Esercizio 11. Un'urna contiene b palline bianche e r palline rosse. Si estrae una pallina e se ne guarda il colore. Si reinsertisce la pallina nell'urna aggiungendo due palline dello stesso colore della pallina estratta.

Questa operazione viene ripetuta quattro volte. Calcolare:

1. la probabilità che si estraggano, nell'ordine: due palline bianche e poi due palline rosse;
2. la probabilità che nelle prime due estrazioni vengano estratte una pallina bianca ed una pallina rossa.

Esercizio 12. Si hanno due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 palline rosse. La seconda urna contiene 5 palline gialle e 5 palline verdi. Si estraggono due palline (senza reimbussolamento) dalla prima urna.

Se le due palline sono dello stesso colore, si estraggono due palline dalla seconda urna, altrimenti si estraggono quattro palline dalla seconda urna.

Calcolare la probabilità che dalla seconda urna venga estratta una ed una sola pallina gialla.

Sapendo che dalla seconda urna è stata estratta una ed una sola pallina gialla, calcolare la probabilità che dalla prima urna siano state estratte due palline bianche.

Esercizio 13. Si hanno due urne, U_1 e U_2 . U_1 contiene 3 palline bianche e 7 palline rosse. U_2 contiene 5 palline bianche e 5 palline rosse.

Susannina lancia due monete:

- se escono due teste estrae (senza reimbussolare) due palline da U_1 ;
- se escono una testa ed una croce estrae una pallina da ciascuna urna;
- se escono due croci estrae (senza reimbussolare) due palline da U_2 .

Calcolare la probabilità che Susannina estragga una pallina bianca ed una pallina rossa.

Sapendo che Susannina ha estratto una bianca ed una rossa, calcolare la probabilità che nel lancio delle monete siano uscite una testa ed una croce.