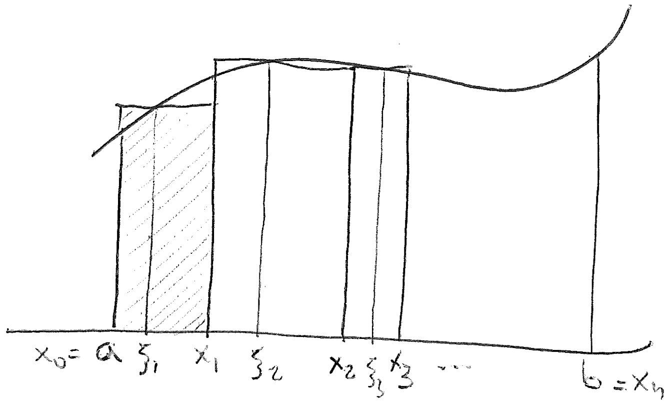
Misura ed integrale di Lebesgue

1. L'integrale di Riemann

È la definizione classica di integrale e corrisponde a quella già nota dal corso di analisi 1 o addirittura dalle scuole superiori.

Data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, fissiamo una partizione $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ dell'intervallo $[a,b]$ e scegliamo $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ per $i=1\ldots n$.



Definizione: Si dice SOMMA DI RIEMANN di f nell'intervallo $[a,b]$ l'espressione
$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)$$

Gli addendi della somma possono essere interpretati come aree di rettangoli di base (x_i-x_{i-1}) e altezza $f(\xi_i)$. Il valore S_n rappresenta quindi una approssimazione dell'area del sottografico di f.

Si osservi che il valore di S_n dipende da tante cose: n, la scelta degli x_i, la scelta degli ξ_i.

In generale non è detto che esiste il $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ ma, quando questo accade definiamo

<u>Definizione</u>: Si dice INTEGRALE DI RIEMANN di f nell'intervallo $[a,b]$ il limite, se esiste, $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Una volta scelto n e fissata la partizione $x_0<x_1<\dots<x_n$ tra le possibili scelte degli ξ_i ci sono anche le ascisse dei punti di massimo e di minimo di f negli intervalli $[x_{i-1},x_i]$.

<u>Oss</u>: L'esistenza di max e min è garantita dal teorema di Weierstrass dato che f è continua e l'intervallo è un compatto.

Queste due scelte portano alla definizione rispettivamente di integrale superiore ed integrale inferiore di f secondo Riemann. Integrale superiore ed inferiore di f esistono in ogni caso ma non è detto che siano uguali fra loro.

Se ξ_i sono tali che $f(\xi_i)=\max_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ e η_i tali che $f(\eta_i)=\min_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ poniamo:

$$\overline{S}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)$$

$$\underline{S}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(\eta_i)$$

Si verifica facilmente che f è integrabile secondo Riemann se e solo se $\overline{S}=\underline{S}$.

<u>Esempio</u>: Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$, per $x \in [0,1]$

Osserviamo che $\overline{S} = 1$ mentre $\underline{S} = 0$ ovvero che $f(x)$ non è integrabile secondo Riemann.

Oltre alla presenza di funzioni non integrabili ci sono anche altri aspetti che rendono poco soddisfacente l'integrale secondo Riemann. Ad esempio:

i) è <u>definito solo per funzioni continue</u> su intervalli limitati. È necessario estenderlo a situazioni più generali ricorrendo a trucchetti vari (funzioni non limitate, domini non limitati...)

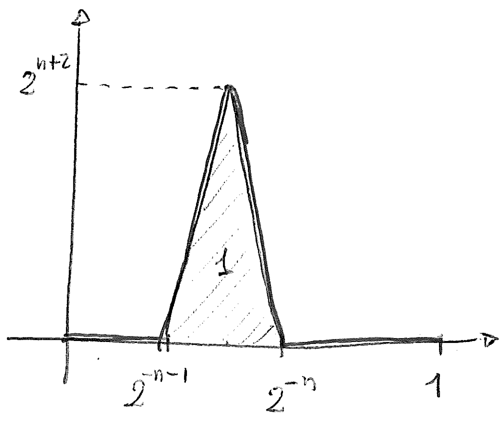
ii) <u>l'insieme di integrazione è un intervallo</u>. Può essere esteso a domini che sono unioni di intervalli ma non a domini più generali o poco regolari

iii) le funzioni integrabili su un certo insieme sono uno spazio vettoriale. Se introduciamo una norma su questo spazio $\left(\|f\| = \int |f| \right)$ farebbe comodo che fosse uno spazio di <u>Banach</u> ovvero che fosse completo, ma non è così.

<u>Esempio</u>: Siano f_n le funzioni il cui grafico è riportato a fianco. Per ogni n si ha

$$\int_0^1 f_n \, dx = 1$$

ma, se $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ dato che $f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$.



(iv) Il punto (iii) ci porta a considerare le successioni di funzioni. Farebbe comodo che se $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ allora $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$. Dall'esempio precedente sappiamo che non è così.
Le condizioni che garantiscono lo scambio del limite con l'integrale nel caso dell'integrale di Riemann sono molto restrittive (convergenza uniforme) mentre lo scambio è possibile in situazioni più generali.

1.1 Misura di Peano - Jordan

A partire dall'integrale di Riemann è possibile definire una teoria della misura ovvero un modo per assegnare un valore che rappresenti la grandezza di un insieme (lunghezza, area, volume, ...) e che soddisfi alcune proprietà quali: (se A, B sono misurabili)

- additività: se $A \cap B = \emptyset$ allora $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$
- subadditività: in generale $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$
- invarianza per traslazioni

La misura di Peano - Jordan di un insieme A è definita come $m(A) = \int_A \chi_A(x)\,dx$ (χ_A è la funzione caratteristica di A)

Quindi la possibilità di misurare un insieme è legata alla possibilità di integrare una funzione. È importante quindi che le funzioni integrabili siano il maggior numero possibile. Con la misura di P-J però abbiamo già problemi a misurare i razionali dell'intervallo $[0,1]$ dato che la funzione di Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$ non è integrabile secondo Riemann

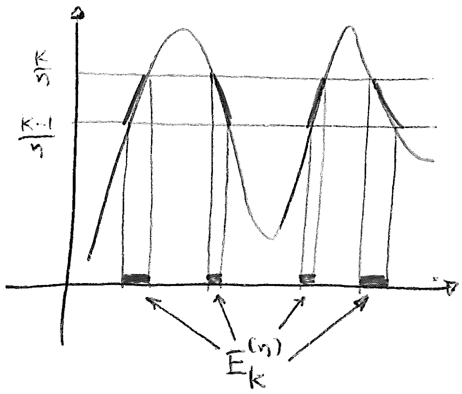
2. Integrale di Lebesgue

Per ovviare agli inconvenienti visti sopra è sorta la necessità di sviluppare una teoria dell'integrazione (e della misura) più efficiente di quella di Riemann e Peano-Jordan.
La nuova teoria fu proposta nel 1902 da Henry Lebesgue nella sua tesi di dottorato.

L'idea di base della nuova teoria è di definire l'integrale a partire da una partizione dell'asse y invece che dell'asse x.
Per fissare le idee consideriamo una funzione continua e limitata in $[a,b]$ e consideriamo i suoi insiemi di livello

$$F_\alpha = \{x \in [a,b] : f(x) > \alpha\}$$

Definiamo poi $E_k^{(n)} = \left\{x \in [a,b] : \frac{k-1}{n} < f(x) \leq \frac{k}{n}\right\} = F_{\frac{k-1}{n}} \setminus F_{\frac{k}{n}}$.



Possiamo ottenere una approssimazione per difetto e per eccesso dell'area del sottografico di f tramite le somme:

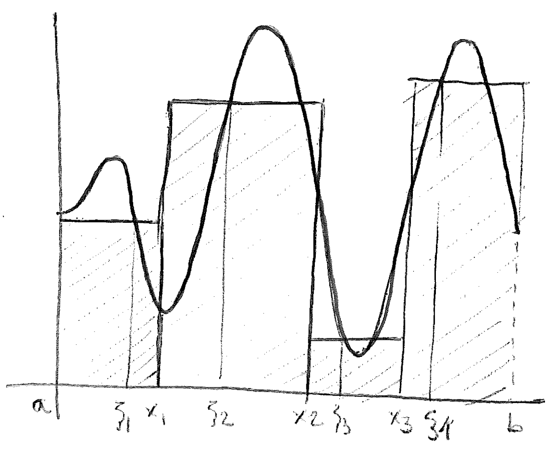
$$s_n^- = \sum_{k=1}^{n} |E_k^{(n)}| \frac{k-1}{n} \quad \text{e} \quad s^+ = \sum_{k=1}^{n} |E_k^{(n)}| \frac{k}{n}$$

dove $|E_k^{(n)}|$ indica la misura dell'insieme $E_k^{(n)}$. Si nota subito che $0 \leq s_n^+ - s_n^- \leq \sum_{k=1}^{n} |E_k^{(n)}| \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}(b-a)$ ovvero che in ogni caso vale $\lim_{n\to\infty} (s_n^+ - s_n^-) = 0$ quindi abbiamo sempre un valore del limite, almeno così sembrerebbe.

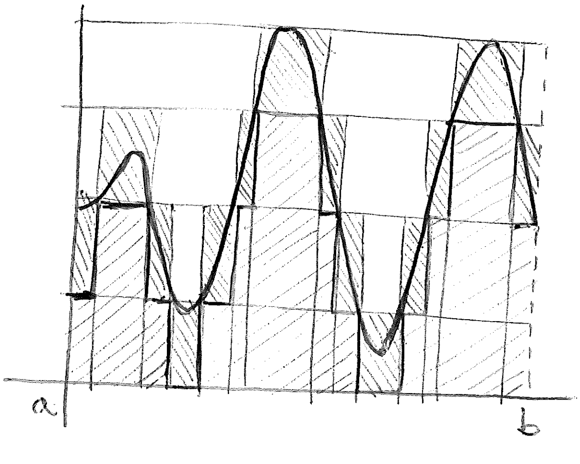
In realtà il problema è stato solo spostato da un'altra parte ovvero tutto funziona fin tanto che sappiamo misurare gli insiemi $E_k^{(n)}$.

Fin tanto che la funzione è continua gli insiemi $E_k^{(n)}$ sono unioni più o meno complicate di intervalli o poco più ma nel caso di funzioni poco regolari (es: Dirichlet) possono diventare complicati e quindi difficili da misurare.

Questo ci porta a dover sviluppare una teoria della misura che ci permette di assegnare un valore della misura al più ampio insieme possibile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. e che comunque continui a soddisfare proprietà quali additività, subadditività ecc ecc e che coincide con la misura elementare e con quella di Riemann nei casi in cui siano utilizzabili entrambe.



Riemann



Lebesgue

3. La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$

Il punto di partenza per la definizione della misura di Lebesgue è la nozione di lunghezza di un intervallo.

Se I è un intervallo limitato di estremi a e b la sua lunghezza $\ell(I)$ è data da $b-a$. Se I è un intervallo illimitato la sua lunghezza è $+\infty$.

La lunghezza così definita è una funzione d'insieme che ad ogni intervallo di $\mathbb{R}$ associa un numero non negativo.

Quello che vogliamo fare è cercare di estendere la nozione di lunghezza a sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ più generali in modo da poterli "misurare".

La prima estensione naturale della misura è alla classe degli insiemi aperti di $\mathbb{R}$. Ogni insieme aperto è l'unione di una successione numerabile determinata di intervalli aperti disgiunti $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$

Poniamo $\ell(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$.

La classe degli insiemi aperti è però troppo ristretta; cerchiamo quindi di estendere ulteriormente il concetto di misura.

Sarebbe auspicabile una funzione d'insieme che verifichi le proprietà seguenti:

(i) $m(E)$ risulti definita per ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$

(ii) Se I è un intervallo allora $m(I) = \ell(I)$

(iii) <u>Additività numerabile</u>: se $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e gli E_n sono a due a due disgiunti allora $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$

(iv) <u>Invarianza per traslazioni</u>: per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $m(E+x) = m(E)$

Si potrebbe dimostrare che non è possibile soddisfare contemporaneamente le (i)-(v).

Se vogliamo mantenere (ii)-(iii)-(iv) non si potranno misurare tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Viceversa, se vogliamo mantenere la (i) occorrerà indebolire qualcuna delle altre proprietà ad esempio sostituendo la (iii) con

(iii-bis) <u>Subadditività numerabile</u>: se $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ allora

$$m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

3.1 La misura esterna di Lebesgue

<u>Definizione</u>: Si dice misura esterna di Lebesgue $m^*(E)$ di $E \subseteq \mathbb{R}$ il numero

$$m^*(E) = \inf_{A \supset E} m(A)$$

ovvero, dato che ogni aperto è unione di intervalli disgiunti, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $m^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$

dove l'estremo inferiore è fatto su tutte le successioni di intervalli $\{I_n\}$ tali che $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

<u>Proposizione</u>:
a) $m^*(E) \geq 0 \quad \forall E$

b) $m^*(\emptyset) = 0$

c) se $A \subseteq B$ allora $m^*(A) \leq m^*(B)$

d) $m^*(\{x_0\}) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Dimostrazione: tutte di facile verifica.

Verifichiamo che la misura esterna $m^*(E)$ soddisfa le proprietà (i) e (iii-bis)

Proposizione: Per ogni intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ risulta $m^*(I) = \ell(I)$

Dimostrazione: Sia $I = [a,b]$. Per ogni $\varepsilon > 0$ $I \subseteq (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ quindi

$m^*(I) \leq \ell(a-\varepsilon, b+\varepsilon) = b-a+2\varepsilon$ quindi $m^*(I) \leq b-a$.

D'altra parte $(a+\varepsilon, b-\varepsilon) \subset I$ quindi $m^*(a+\varepsilon, b-\varepsilon) \leq m^*(I)$ per ogni ε. Passando al limite: $\lim_{\varepsilon \to 0} (b-a) - 2\varepsilon \leq m^*(I)$

cioè $b-a \leq m^*(I) \leq b-a \Rightarrow m^*(I) = b-a$.

Sia ora I un intervallo qualunque di estremi a e b.

Si ha $(a,b) \subseteq I \subseteq [a,b]$ e quindi

$$b-a = m^*(a,b) \leq m^*(I) \leq m^*[a,b] = b-a$$

ovvero $m^*(I) = b-a = \ell(I)$ per tutti gli intervalli limitati.

Se I è illimitato allora I contiene intervalli di lunghezza maggiore di qualunque numero finito quindi ha misura maggiore di qualunque numero finito.

Segue $m^*(I) = +\infty = \ell(I)$.

Proposizione: La misura esterna è numerabilmente subadditiva ovvero per ogni successione di insiemi $\{E_n\}$ si ha

$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$. (cioè vale la (iii)-bis).

Dimostrazione: Se almeno uno degli insiemi E_n ha misura esterna infinita la conclusione è ovvia.

Supponiamo ora che tutti gli E_n ~~abbiano~~ abbiano misura esterna finita.

Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e fissiamo un n. Per definizione di misura esterna esiste un aperto A_n tale che $E_n \subset A_n$ e $m^*(A_n) < m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ (dalla definizione di inf). Si ha allora che $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e quindi

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty}\left(m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \varepsilon$$

Poiché vale per ogni $\varepsilon > 0$, passo al limite per $\varepsilon \to 0$ e segue

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

<u>Proposizione</u>: la misura esterna di Lebesgue è invariante per traslazioni: $m^*(E+x) = m^*(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dimostrazione: Conseguenza dell'invarianza per traslazione delle lunghezze degli intervalli.

Traccia: $\ell(I+x) = \ell(I) \Rightarrow m^*(A+x) \leq m^*(A)$, poi $A = (A+x) - x \ldots$

Riepilogando: la funzione d'insieme m^* soddisfa le condizioni (i), (ii), (iii)-bis, (iv).

Vedremo più avanti che m^* non è numerabilmente additiva (non è additiva neppure per l'unione finita) su tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Soddisfa però la (iii) su una classe molto ampia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

3.2 Insiemi misurabili

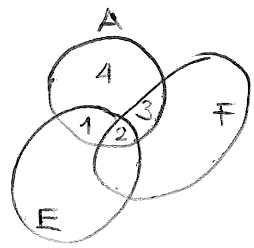
Definizione: Un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ si dice misurabile secondo Lebesgue se $\forall A \subset \mathbb{R}$ risulta $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \bar{E})$

La classe degli insiemi misurabili si indica con $\mathcal{M}$.

OSSERVAZIONE: Poiché m^* è subadditiva vale sempre $\leq$. Quindi per dimostrare che E è misurabile potrò far vedere che $\forall A \subset \mathbb{R}$ vale $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \bar{E})$.

Proposizione: Se $m^*(E) = 0$ allora E è misurabile

Dimostrazione: Banale



Proposizione: Se $E, F \in \mathcal{M}$ allora $E \cup F \in \mathcal{M}$

Dimostrazione: Sia A un insieme qualunque.

Se $A_1 \ldots A_4$ sono gli insiemi in figura si ha $A = A_1 \cup \ldots \cup A_4$

$F \in \mathcal{M} \Rightarrow m^*(A_3 \cup A_4) = m^*(A_3) + m^*(A_4)$ (considero $A_3 \cup A_4$)

$E \in \mathcal{M} \Rightarrow m^*(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = m^*(A_1 \cup A_2) + m^*(A_3)$

$$E \in \mathcal{M} \Rightarrow m^*(A) = m^*(A_1 \cup A_2) + m^*(A_3 \cup A_4) = \\ = [m^*(A_1 \cup A_2) + m^*(A_3)] + m^*(A_4) = \\ = m^*(A_1 \cup A_2 \cup A_3) + m^*(A_4)$$

cioè la tesi.

OSSERVAZIONE: Come conseguenza: se $E, F \in \mathcal{M}$ ed $E \cap F = \emptyset$ allora $m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$

(Prendo $A = E \cup F$: $m^*(E \cap F) = m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \bar{E}) =$
$= m^*((E \cup F) \cap E) + m^*((E \cup F) \cap \bar{E}) =$
$= m^*(E) + m^*(F)$)

Si estende banalmente alle unioni finite

Proposizione: la misura esterna m^* è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}$ ovvero, se $\{E_i\}$ sono una successione di insiemi misurabili tra loro disgiunti si ha
$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

Dimostrazione: Già sappiamo che m^* è subadditiva quindi già sappiamo che $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$.

Osserviamo che $\bigcup_{n=1}^{N} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ quindi $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) \leq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$.

ma per l'additività finita $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m^*(E_n)$

quindi, $\forall N$ vale $\sum_{n=1}^{N} m^*(E_n) \leq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$.

Se passo al limite per $N \to \infty$ segue la tesi.

Cerchiamo di capire la struttura dell'insieme $\mathcal{M}$. Già sappiamo che è chiuso rispetto all'unione. Che altro si può dire?

Definizione: Sia X un insieme qualunque. Una classe di sottoinsiemi di X si dice σ-algebra se è chiusa rispetto all'unione numerabile e rispetto alla complementazione (cioè se A, B sono nella σ-algebra anche $A \cap B$ e $\bar{A}$ ci sono).

Proposizione: $\mathcal{M}$ è una σ-algebra.

Dimostrazione: Osserviamo che se $E, F \in \mathcal{M}$ anche $E \setminus F \in \mathcal{M}$ ~~[illegible]~~ (dalla definizione di insieme misurabile con qualche passaggio)

Sempre dalla definizione di insieme misurabile sappiamo che se E è misurabile lo è anche il suo complementare.

Per dimostrare che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra basterà dimostrare che l'unione numerabile di insiemi disgiunti e misurabili è misurabile.

Infatti se $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ (non necessariamente disgiunti)

pongo $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 \setminus E_1$, $F_3 = E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)$ ..

.. $F_n = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$.

Gli insiemi F_i sono a due a due disgiunti ed inoltre

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Supponiamo quindi $E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall i \neq j$. Per ogni insieme A si ha; per l'additività finita:

$$m^*(A) = m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) + m^*\left(A \cap \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)}\right) \geq$$

$$\geq m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) + m^*\left(A \cap \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)}\right)$$

dato che $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset \bigcup_{n=1}^{N} E_n$.

Sappiamo che per l'additività finita $m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap E_n)$

quindi: $m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap \bar{E})$.

Se si fa $N \to \infty$:

$$m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap \bar{E}) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \bar{E})$$

per la subadditività. Quindi E è misurabile.

Proposizione 1: Ogni intervallo è misurabile

Dimostrazione: • Per gli intervalli della forma $(a,+\infty)$:

A insieme qualunque. Sia $A_1 = A \cap (a,+\infty)$, $A_2 = A \cap (-\infty, a]$.

Per la subadditività basta dimostrare che:

$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$.

Se $m^*(A) = +\infty$ è ovvio. Se $m^*(A) < +\infty$, fissato $\varepsilon > 0$

esiste un aperto $B \supset A$ tale che $m(B) \leq m(A) + \varepsilon$

Pongo $B_1 = B \cap (a,+\infty)$, $B_2 = B \cap (-\infty, a]$. allora:

$m^*(B) = m^*(B_1) + m^*(B_2)$.

Poiché $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2 \Rightarrow m^*(A_1) \leq m^*(B_1)$, $m^*(A_2) \leq m^*(B_2)$

Quindi:

$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(B_1) + m^*(B_2) = m^*(B) \leq m^*(A) + \varepsilon$

Passando al limite segue la tesi.

• Osserviamo ora che $(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b-\frac{1}{n}] = \overline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (b-\frac{1}{n}, \infty)\right)}$

Poiché $\mathcal{M}$ è una σ-algebra anche $(-\infty, b)$ è misurabile.

• Per intersezione e complementazione tutti gli intervalli sono misurabili.

Proposizione: Data una classe $\mathcal{a}$ di sottoinsiemi di un insieme X, esiste la più piccola σ-algebra che contiene $\mathcal{a}$.

Chiameremo tale σ-algebra la σ-algebra GENERATA DA $\mathcal{a}$.

Dimostrazione: Basta osservare che l'insieme delle parti di X è esso stesso una σ-algebra che contiene $\mathcal{a}$.

Se $\mathcal{Y}$ è l'insieme di tutte le σ-algebre che contengono $\mathcal{a}$ anche $\bigcap \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \in \mathcal{Y}\}$ è una σ-algebra ed è la più piccola.

<u>Definizione</u>: Indicheremo con $\mathcal{B}$ la σ-algebra generata dagli intervalli di $\mathbb{R}$. I suoi elementi sono detti Boreliani.

OSSERVAZIONE: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ ovvero ogni boreliano è misurabile

<u>Definizione</u>: Indichiamo con m la restrizione di m^* ai boreliani. La funzione d'insieme così ottenuta, definita sulla σ-algebra degli insiemi misurabili si dice MISURA DI LEBESGUE e soddisfa le condizioni (ii), (iii), (iv).

Faremo vedere più avanti che non soddisfa la (i).

<u>Proposizione</u>: Sia $\{E_i\}$ una successione di insiemi misurabili. Allora:

(i) se $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_i \subseteq \ldots$ vale $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)$

(ii) se $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \supseteq E_i \supseteq \ldots$ e per un certo i_0 si ha $m(E_{i_0}) < +\infty$ allora $m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)$

Dimostrazione: a) $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 \setminus E_1$, .., $F_i = E_i \setminus E_{i-1}$. Si ha:

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ dove gli F_i sono misurabili e a due a due disgiunti. Quindi

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(F_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

b) In modo simile. Osserviamo che l'ipotesi $m(E_{i_0}) < +\infty$ è essenziale: se ad esempio $E_i = (i, +\infty)$ si ha $m(\bigcap E_i) = m(\emptyset) = 0$ ma $m(E_i) = +\infty \; \forall i$.

3.3 Regolarità della misura di Lebesgue

<u>Proposizione</u>: Le affermazioni seguenti sono equivalenti:

a) E è misurabile

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A$ aperto, con $A \supseteq E$ tale che $m^*(A-E) < \varepsilon$

c) Esiste un boreliano B, $B \supseteq E$ tale che $m^*(B-E) = 0$

d) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists C$ chiuso, con $C \subseteq E$ tale che $m^*(E-C) < \varepsilon$

e) Esiste un boreliano B', $B' \subseteq E$ tale che $m^*(E-B') = 0$

(Definizione: se una funzione d'insieme non negativa e numerabilmente additiva soddisfa b), c), d), e) si dice MISURA REGOLARE)

Dimostrazione: Basta far vedere che a) $\Rightarrow$ b), b) $\Rightarrow$ c), c) $\Rightarrow$ a). Poi passando ai complementari segue subito a) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a)

a) $\Rightarrow$ b) Se $m(E) < +\infty$: Per definizione $\exists A \supseteq E$ aperto tale che $m(A) < m(E) + \varepsilon$. A è misurabile quindi $m(A-E) = m(A) - m(E) < \varepsilon$

Se $m(E) = +\infty$: $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, I_n intervalli limitati.

Per ogni n consideriamo $E_n = E \cap I_n$. Esiste A_n aperto limitato t.c. $m(A_n) < m(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \Rightarrow m(A_n \setminus E_n) \leq m(A_n) - m(E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Pongo $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e si ha: $A - E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \leq \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - E_n)$.

Quindi $m(A-E) \leq \sum m(A_n - E_n) \leq \varepsilon$

b) $\Rightarrow$ c) $\forall n \in \mathbb{N}$ sia A_n aperto t.c. $A_n \supseteq E$ e $m^*(A_n - E) < \frac{1}{n}$.
$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ è un boreliano ed è t.c. $m^*(B-E) = 0$

c) $\Rightarrow$ a) $E = B - (B-E)$. B è misurabile, $B-E$ è misurabile dato che $m^*(B-E) = 0$ e quindi anche E è misurabile

<u>Proposizione</u>: Se $m^*(E) < +\infty$ allora $E \in \mathcal{M}$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_1 \dots I_n$ intervalli limitati disgiunti tali che $m^*(E \,\Delta\, \bigcup_{i=1}^{n} I_i) < \varepsilon$.

Esempio: L'insieme di Cantor

La nozione di misura di Lebesgue si discosta molto dall'idea intuitiva di estensione di un insieme come si vede dall'esempio seguente:

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Consideriamo l'intervallo $[0,1]$.
Togliamo da $[0,1]$ i punti dell'intervallo di ampiezza $1/n$ e punto medio $1/2$. (aperto)
Togliamo poi dai due intervalli rimasti gli intervalli aperti di lunghezza $\frac{1}{n^2}$ e punto medio in quello degli intervalli rimasti.
Proseguiamo togliendo 4 intervalli di ampiezza $\frac{1}{n^3}$ e così via indefinitamente.
Sia C_n l'insieme dei punti di $[0,1]$ che alla fine non sono rimossi. C_n è misurabile infatti $\overline{C_n}$ è aperto e si ha:

$$m(\overline{C_n}) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \dots + \frac{2^k}{n^{k+1}} + \dots = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n = \frac{1}{n-2}.$$

Quindi $m(C_n) = 1 - \frac{1}{n-2}$.

Osserviamo che C_n non ha punti interni (non può contenere intervalli più lunghi di 2^{-k} per ogni k). Nonostante questo $m(C_n) > 0$ se $n > 3$.

L'insieme $C = C_3$ si chiama INSIEME DI CANTOR ed ha quindi misura zero. Si potrebbe verificare (stessa dimostrazione fatta per $\mathbb{R}$) che C non è numerabile.
Quindi gli insiemi di misura zero non sono solo le unioni numerabili di punti.

4. Integrazione su spazi di misure

<u>Definizione</u>: Si dice SPAZIO DI MISURE una terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ dove X è un insieme, $\mathcal{M}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di X, e μ è una <u>misura</u> su $\mathcal{M}$ ovvero una funzione $\mu: \mathcal{M} \to [0, \infty]$ tale che

a) $\mu(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{M}$

b) $\mu(\emptyset) = 0$

c) se $\{E_n\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti si ha $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

<u>Definizione</u>: • Gli $E \subseteq X$, $E \in \mathcal{M}$ si dicono <u>insiemi misurabili</u>

• La misura μ si dice <u>completa</u> se tutti i sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla sono misurabili

$(E \in \mathcal{M}, \mu(E) = 0, F \subseteq E \Rightarrow F \in \mathcal{M})$

• La misura si dice σ-finita se ogni elemento di $\mathcal{M}$ è unione numerabile di insiemi misurabili di misura finita.

Osservazione: Se $\{E_i\}$ è una successione di insiemi misurabili allora:

a) se $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq \ldots \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$

b) se $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots$ e $\mu(E_i) < +\infty \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

Vale in generale, non solo per la misura di Lebesgue

4.1 Funzioni misurabili

Definizione: Si dice *funzione semplice* su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ogni combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. Indichiamo con S l'insieme delle funzioni semplici.

Osservazione: la rappresentazione di una funzione semplice non è unica. Possiamo però rappresentarla in maniera standard osservando che assume solo un numero finito di valori $\beta_1 \dots \beta_m$. Se $F_k(x) = \{x \in X : \varphi(x) = \beta_k\}$ allora gli F_k sono misurabili, $X = \bigcup_{k=1}^{m} F_k$ e $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{F_k}(x)$.

Definizione: Una funzione $f : X \to [-\infty, \infty]$ si dice *misurabile* su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se è limite puntuale di funzioni semplici. Indichiamo con M la classe delle funzioni misurabili.

Si verifica che M è un'algebra rispetto alle operazioni di max e min. La definizione che abbiamo dato però è un po' scomoda. Cerchiamo di trovare una caratterizzazione più maneggevole delle funzioni misurabili.

Lemma: Sia $f : X \to [-\infty, \infty]$. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$

c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{M}$

d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{M}$

Proposizione: Una funzione f è misurabile se e solo se soddisfa le condizioni del lemma

~~Dimostrazione: (traccia)~~

~~Se $f \in \mathcal{M}$ allora esistono φ_n t.c. $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$.~~

~~Pongo $\psi_n = \max_{k \geq n} \{\varphi_k\}$.~~

~~Ora la successione ψ_n è non decrescente quindi:~~

~~$\{x : f(x) > \alpha\} =$~~

Dimostrazione: (traccia). Con qualche trucchetto posso fare in modo che se $f \in \mathcal{M}$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ e la successione φ_n sia non decrescente. Poi uso le proprietà di passaggio al limite

Se invece f soddisfa le condizioni del lemma allora taglio a strisce l'asse delle y e considero le funzioni caratteristiche degli insiemi di livello e sommo.

Sono funzioni semplici e il limite puntuale è f.

Proposizione: Una funzione f è misurabile se e solo se per ogni boreliano B di $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$

Proposizione: Se $f \in \mathcal{M}$ è limitata esiste una successione di funzioni semplici che converge uniformemente ad f

Proposizione: Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili allora $\sup_n \{f_n\}$ e $\inf_n \{f_n\}$, $\max\lim_n \{f_n\}$, $\min\lim_n \{f_n\}$ sono funzioni misurabili

Dim: Basta vedere come sono fatti gli insiemi di livello e tenere conto che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra.

<u>DEFINIZIONE</u>: Se una proprietà è verificata per tutti i punti di X tranne al più un insieme di misura nulla si dice che la proprietà è verificata QUASI OVUNQUE.

<u>Proposizione</u>: Se $f \in \mathcal{M}$ e $f = g$ q.o. allora $g \in \mathcal{M}$

Dimostrazione: gli insiemi di livello di f e g differiscono per un insieme di misura zero che è misurabile perché la misura è completa. Quindi sono misurabili anche gli insiemi di livello di g.

4.2. L'integrale su $(X, \mathcal{M}, \mu)$

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Indichiamo con S_0 l'insieme delle funzioni semplici diverse da zero solo su un insieme di misura finita:

$$S_0 = \{ f \in S : \mu\{t : f(t) \neq 0\} < +\infty \}$$

Se $\varphi \in S_0$ l'integrale di φ su X rispetto alla misura μ è definito nel modo ovvio:

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i)$$

dove $c_1, \dots, c_m$ sono i valori assunti da μ ed $E_i = \{ x : \varphi(x) = c_i \}$.

Si verifica immediatamente che se $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in S_0$ si ha:

(a) se $\varphi \geq 0 \Rightarrow \int \varphi \, d\mu \geq 0$

(b) $\left| \int \varphi \, d\mu \right| \leq \int |\varphi| \, d\mu$

(c) $\int (\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) \, d\mu = \alpha \int \varphi_1 \, d\mu + \beta \int \varphi_2 \, d\mu$

Estendiamo ora la definizione di integrale alla classe delle funzioni misurabili:

Definizione: a) se $f \in \mathcal{M}$, $f \geq 0$ poniamo

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu \text{ t.c. } \varphi \in S_0, \, 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

b) se $f \in \mathcal{M}$, $f = f^+ - f^-$, se almeno uno tra gli integrali $\int_X f^+ d\mu$, $\int_X f^- d\mu$ è finito, si pone

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Definizione: Indichiamo con $\mathcal{L}_1(X, \mu)$ l'insieme delle funzioni misurabili per le quali entrambi i valori $\int_X f^+ d\mu$, $\int_X f^- d\mu$ sono finiti. Tali funzioni si dicono INTEGRABILI (o SOMMABILI) su X rispetto alla misura μ.

Proprietà (ovvie): a) $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$ (omogeneità)

b) $0 \leq f \leq g \Rightarrow 0 \leq \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$ (monotonia)

Definizione: Se $A \in \mathcal{M}$ l'integrale di $f \in M$ su A è definito come

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu$$

Teorema: Se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi misurabili disgiunti, posto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, per ogni $f \in M$, $f \geq 0$ si ha

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu$$

Quindi l'integrale è una funzione d'insieme numerabilmente additiva.

Proprietà dell'integrale:

(a) Se $\mu(B)=0$ allora $\int_A f\,d\mu = \int_{A\cup B} f\,d\mu$

(b) Posto $A^+=\{x : f(x)\geq 0\}$, $A^-=\{x : f(x)<0\}$, si ha:

$$\int |f|\,d\mu = \int_{A^+}|f|\,d\mu + \int_{A^-}|f|\,d\mu = \int f^+ + \int f^-.$$

Quindi $|f|\in\mathcal{L}^1 \iff f\in\mathcal{L}^1$.

(c) $\forall f\in\mathcal{L}^1 \quad \left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$

(d) Se $f\in M$, $g\in\mathcal{L}^1$ e $|f|\leq g$ allora $f\in\mathcal{L}^1$

(e) Se $f,g\in\mathcal{L}^1$ allora $f+g,\ f-g\in\mathcal{L}^1$

(f) Se $f\in\mathcal{L}^1$ allora $\mu\{x : |f(x)|=\infty\}=0$

(g) Se $f\in M$, $\int_X |f|\,d\mu=0 \iff f=0$ quasi ovunque su X

4.3. Teorema di passaggio al limite sotto l'integrale

Teorema (di Beppo-Levi o della convergenza monotona)

$\{f_n\}$ successione di funzioni non negative, misurabili e tali che $f_n(x)\leq f_{n+1}(x)$ $\forall x$, se $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ allora

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$$

Dimostrazione: Puntualmente la successione ~~[illegible]~~ f_n è monotona quindi è monotona anche la successione $\left\{\int f_n\,d\mu\right\}$ ovvero il limite a primo membro esiste e che inoltre la disuguaglianza

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu \leq \int f\,d\mu$$

è ovvia.

Poniamo $\alpha = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$. Se $\alpha = +\infty$ la tesi è ovvia.

Supponiamo $\alpha < +\infty$

Se $\beta \in (0,1)$ è fissato e $\varphi \in S_0$ è una funzione fissata, con $0 \leq \varphi \leq f$, poniamo

$$A_n = \{x : f_n(x) \geq \beta \varphi(x)\}$$

Si verifica che $\forall n \; A_n \subseteq A_{n+1}$ e che A_n è misurabile per ogni n.

Inoltre, poiché $\beta < 1$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

Per ogni n si ha quindi che:

$$\beta \int_{A_n} \varphi \, d\mu = \int_{A_n} \beta\varphi \, d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \leq \alpha$$

Quindi, poiché la successione A_n è monotona si ha

$$\lim_{n\to\infty} \beta \int_{A_n} \varphi \, d\mu = \beta \int_A \varphi \, d\mu \leq \alpha \quad \text{poiché} \quad \beta < 1$$

e questo vale $\forall \beta \in (0,1)$, per ogni φ semplice $\leq f$.

Se passo al limite per $\beta \to 1$ e al sup su φ:

$$\left(\lim_{\beta \to 1} \left(\sup_{\varphi} \int_A \varphi \, d\mu \right) \right) = \int_A f \, d\mu$$

ovvero $\int_A f \, d\mu \leq \alpha$. Quindi vale l'uguaglianza.

Osservazione: Beppo Levi continua a valere se ad $f_n \geq 0$ sostituiamo $f_n \geq g$ con $g \in \mathcal{L}^1$.

Dimostrazione: Applico Beppo Levi alle $g_n = f_n - g$.

<u>Lemma (di Fatou)</u>: Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili non negative. Sia $f(x) = \min\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Allora
$$\int_X f\,d\mu \leq \min\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

Dimostrazione: per definizione $\min\lim_{n\to\infty} f_n = \sup_n \left[\inf_{k\geq n} f_k(x)\right]$.

La successione $g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$ è non decrescente ed ha limite f. Per il teorema di Beppo-Levi si ha:

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu$$

Per ogni n però vale

$$\int_X g_n\,d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_X f_n\,d\mu \leq \min\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

Se ora passiamo al limite per $n\to\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu \leq \min\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

<u>Teorema di Lebesgue</u> (convergenza dominata)

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili che converge puntualmente alla funzione f. Se esiste $g \in \mathcal{L}^1$ tale che $|f_n| \leq g$ per ogni n allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

ovvero posso scambiare il limite con l'integrale.

Dimostrazione: le funzioni $g_n = g - f_n$ sono non negative.

Per Fatou $$\int_X g-f \, d\mu \leq \min\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu$$

Inoltre, poiché $|f| \leq g$ f è integrabile e quindi

$$\int_X g-f \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu \quad \text{e}$$

$$\int_X g_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu .$$

Ovvero: $$\int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu \leq \min\lim_{n\to\infty} \left(\int_X g \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu \right)$$

$$= \int_X g \, d\mu - \max\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu .$$

Semplificando: $$\int_X f \, d\mu \geq \max\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu .$$

Analogamente, considerando $g_n = g + f_n$ $\quad (-g \leq f)$

si ottiene $$\int_X f \, d\mu \leq \min\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

e quindi ~~[illegible]~~

$$\max\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \leq \min\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

ovvero l'uguaglianza.