Esercizi 3 - Variabili aleatorie, distribuzione e integrazione

Esercizio 1. La v.a. X ha legge F_X. Sia $Y := X^2$. Calcolare la legge F_Y di Y in funzione di F_X. Supponendo che X abbia distribuzione a.c. con densità f, calcolare, se esiste, la densità della distribuzione di Y.

Esercizio 2. La v.a. X ha distribuzione a.c. con densità f. Siano a, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Calcolare, se esiste, la densità della distribuzione di $Y := aX + b$ in funzione di f.

Esercizio 3. Sia X una v.a. con valore atteso e varianza finiti. Mostrare che $\mathbb{E}[X]$ è l'unico punto di minimo della funzione

$$\varphi_2 \colon s \in \mathbb{R} \mapsto \int_\Omega |X(\omega) - s|^2 \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4. Sia X una v.a. con valore atteso finito. Mostrare che la mediana t_M è punto di minimo della funzione

$$\varphi_1 \colon s \in \mathbb{R} \mapsto \int_\Omega |X(\omega) - s| \, \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \in \mathbb{R}$$

Esercizio 5. Si lancia n volte una moneta su cui ad ogni lancio esce testa con probabilità p. Sia X la v.a. data da

$$X := \#\ \text{teste - }\#\ \text{croci}$$

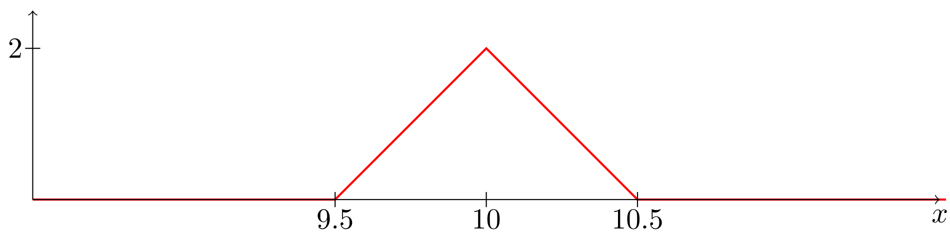
Calcolare la densità discreta di X.

Esercizio 6. Si hanno due urne. Ciascuna urna contiene n palline, numerate da 1 a n. Si estrae una pallina da ciascuna urna. Sia

$$X := \text{massimo dei due valori estratti}$$

Calcolare la densità discreta ed il valore atteso di X.

Esercizio 7. Una fabbrica produce mattonelle quadrate. La lunghezza del lato della mattonella, misurata in centimetri, è una v.a. di distribuzione assolutamente continua associata alla densità $f(x)$ rappresentata in figura.



Le mattonelle possono essere messe in vendita se la lunghezza del lato è compresa tra 9.8 cm e 10.2 cm. Calcolare la probabilità che una mattonella possa essere messa in vendita.
Presa una partita di 20 mattonelle, calcolare la probabilità che almeno 19 mattonelle siano vendibili.

Esercizio 8. La v.a. X è assolutamente continua e ha densità $f_X(x)$ definita da
$$f_X(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Calcolare la densità di $Y = X^2$.

Esercizio 9. Sia $b \in (0,1)$. La v.a. X è distribuita sui <u>reali nonnegativi</u> con densità
$$f(x) = (1-b)\sum_{n=0}^{+\infty} b^n \mathbb{1}_{[n,n+1)}(x).$$
Calcolare valore atteso e varianza di X.

Esercizio 10. La v.a. X è uniformemente distribuita sull'intervallo $(0,a)$, $a > 0$ (cioè X ha distribuzione assolutamente continua con densità $f_X(x) = \dfrac{\mathbb{1}_{(0,a)}(x)}{a}$). Calcolare distribuzione, media, varianza e mediana della v.a. $Y := \sqrt{X}$ e della v.a. $Z := X^2$.

Esercizio 11. La v.a. X è distribuita uniformemente sull'intervallo $[0,4]$. Sia $Y = \max\{3X-2, X^2\}$. Calcolare densità e valore atteso della v.a. Y.

Esercizio 12. Al veriare dei parametri reali positivi c e a si consideri la funzione
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left(\frac{x}{c}\right)^a & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$
Determinare c in modo che F sia la funzione di ripartizione di una v.a. continua X e calcolare la funzione densità $f_X(x)$. Al variare del parametro a determinare media, mediana e varianza di X.