Calcolo delle Probabilità –2016-2017

Primo Compitino – 25 Novembre 2016

------- --

Domanda 1) Un'urna contiene tre palline, una bianca, una rossa e una verde. Ogni secondo viene estratta una pallina a caso e poi reinserita nell'urna.
Calcolare

1. la probabilità che dopo n estrazioni la pallina verde non sia mai stata estratta;
2. la probabilità che dopo n estrazioni almeno una delle tre palline non sia mai stata estratta;
3. la probabilità che dopo n estrazioni una ed una sola delle tre palline non sia mai stata estratta.

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ...., $\frac{2^n-1}{3^{n-1}}$ ...., $\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$ ....

Svolgimento

1) NV = la verde non esce mai
Sono n prove di Bernoulli in cui il successo in ciascuna prova (esce verde) ha $p=\frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(NV) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = \left(1-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2) NB = la bianca non esce mai   NR = la rossa non esce mai
Voglio calcolare $\mathbb{P}(NV \cup NB \cup NR) = \mathbb{P}(NB) + \mathbb{P}(NV) + \mathbb{P}(NR) -$
$- \mathbb{P}(NB \cap NV) - \mathbb{P}(NB \cap NR) - \mathbb{P}(NV \cap NR) + \mathbb{P}(\underbrace{NB \cap NV \cap NR}_{=\emptyset})$

$\mathbb{P}(NB \cap NV) =$ n prove in cui il successo (esce rossa) ha $p=\frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(NB \cap NV) = \binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ Analogo $\mathbb{P}(NB \cap NR)$ e $\mathbb{P}(NV \cap NR)$

$\mathbb{P}(NV \cup NB \cup NR) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n-1}{3^{n-1}}$

3) $\mathbb{P}\Big((NV \cup NB \cup NR) \setminus \big((NV \cap NB) \cup (NV \cap NR) \cup (NB \cap NR)\big)\Big)$

$= \mathbb{P}(NV \cup NB \cup NR) - \mathbb{P}\big((NV \cap NB) \cup (NV \cap NR) \cup (NB \cap NR)\big)$

$= \frac{2^n-1}{3^{n-1}} - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n-2}{3^{n-1}}$

Domanda 2) Si lanciano 3 dadi identici, a sei facce, non truccati. Si contano quanti sono i "6" ottenuti e si lanciano altrettante monete. Su ciascuna moneta esce testa con probabilità $p = \frac{1}{4}$.
Calcolare la probabilità di ottenere 1 sola testa.
Sapendo di aver ottenuto una sola testa, calcolare la probabilità di aver ottenuto due volte il valore "6" nel lancio dei dadi.

$529/4608$ ...., $120/529$ ....

Svolgimento T= ottengo 1! Teste

$$P(T \mid \text{lancio } n \text{ monete}) = \binom{n}{1} p (1-p)^{n-1} = n \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{n\, 3^{n-1}}{4^n}$$

$$P(\text{lancio } n \text{ monete}) = \binom{3}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-n} = \binom{3}{n}\frac{5^{3-n}}{6^3}$$

$$P(T) = \sum_{n=1}^{3} P(T \mid \text{lancio } n \text{ monete})\, P(\text{lancio } n \text{ monete}) =$$

$$= \frac{1}{4}\binom{3}{1}\frac{5^2}{6^3} + \frac{2\cdot 3}{4^2}\binom{3}{2}\frac{5}{6^3} + \frac{3\cdot 3^2}{4^3}\binom{3}{3}\frac{5^0}{6^3} =$$

$$= \frac{3\cdot 5^2}{4\cdot 6^3} + \frac{2\cdot 3^2\cdot 5}{4^2\cdot 6^3} + \frac{3^3}{4^3\cdot 6^3} =$$

$$= \frac{\cancel{3}\cdot 5^2}{2^5\cdot 3^{\cancel{3}2}} + \frac{\cancel{2}\cdot \cancel{3}^{\cancel{2}}\cdot 5}{2^{\cancel{7}6}\cdot 3^{\cancel{3}}} + \frac{3^{\cancel{3}}}{2^9\cdot \cancel{3^3}} = \frac{2^4\cdot 5^2 + 2^3\cdot 5\cdot 3 + 3^2}{2^9\cdot 3^2}$$

$$= \frac{400+120+9}{2^9\cdot 3^2} = \frac{529}{2^9\cdot 3^2} = \frac{529}{4608}$$

$$P(\text{lancio 2 monete} \mid T) = \frac{P(T \mid \text{lancio 2 monete})\, P(\text{lancio 2 monete})}{P(T)}$$

$$= \frac{2\cdot 3}{\cancel{2^4}} \cdot \cancel{3}\,\frac{5}{\cancel{2^3}\cdot\cancel{3^3}} \cdot \frac{2^{\cancel{9}}\cdot \cancel{3}^2}{529} = \frac{3\cdot 5\cdot 2^3}{629} = \frac{120}{529}$$

Domanda 2) Si lanciano 4 dadi identici, a sei facce, non truccati. Si contano quanti sono i "6" ottenuti e si lanciano altrettante monete. Su ciascuna moneta esce testa con probabilità $p = \frac{1}{3}$.
Calcolare la probabilità di ottenere esattamente 2 teste.
Sapendo di aver ottenuto due teste, calcolare la probabilità di aver ottenuto tre volte il valore "6" nel lancio dei dadi.

$289/2^3 \cdot 3^7$, $60/289$

Svolgimento

$$\mathbb{P}(TT \mid \text{lancio } n \text{ monete}) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \binom{n}{2}\frac{2^{n-2}}{3^n}$$

$$\mathbb{P}(\text{lancio } n \text{ monete}) = \binom{4}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-n} = \binom{4}{n}\frac{5^{4-n}}{6^4}$$

$$\mathbb{P}(TT) = \sum_{n=2}^{4} \mathbb{P}(TT \mid \text{lancio } n \text{ monete})\mathbb{P}(\text{lancio } n \text{ monete}) =$$

$$= \binom{2}{2}\frac{2^0}{3^2}\binom{4}{2}\frac{5^2}{6^4} + \binom{3}{2}\frac{2^1}{3^3}\binom{4}{3}\frac{5^1}{6^4} + \binom{4}{2}\frac{2^2}{3^4}\binom{4}{4}\frac{5^0}{6^4}$$

$$= \frac{\cancel{6}\cdot 5^2}{3^2\cdot 6^{\cancel{4}3}} + \frac{\cancel{3}\cdot \cancel{2}}{3^3}\,4\,\frac{5}{6^{\cancel{4}3}} + \cancel{6}\,\frac{2^2}{3^4\cdot 6^{\cancel{4}3}} = \frac{5^2\cdot 3^2 + 3\cdot 4\cdot 5 + 4}{3^4\cdot 6^3}$$

$$= \frac{225+64}{3^4\cdot 6^3} = \frac{289}{2^3\cdot 3^7}$$

$$\mathbb{P}(\text{lancio } 3 \text{ monete} \mid TT) = \frac{\mathbb{P}(TT \mid \text{lancio } 3 \text{ monete})\mathbb{P}(\text{lancio } 3 \text{ monete})}{\mathbb{P}(TT)} =$$

$$\binom{3}{2}\frac{2}{3^3}\binom{4}{3}\frac{5}{6^4}\cdot\frac{2^3\cdot 3^7}{289} = 3\cdot 4\cdot \cancel{2}\cdot 5\cdot \frac{2^{\cancel{3}}\ \cancel{3^7}}{\cancel{2^4}\cdot \cancel{3^7}\cdot 289}$$

$$= \frac{60}{289}$$

Domanda 3) Sia $f(x) = 6\left(x - x^2\right) \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ e sia X una v.a. di distribuzione $\mathbb{P}_X = f(x)\mathrm{d}x$.
Calcolare valore atteso e varianza di X.
Calcolare la densità della v.a. $Y := \dfrac{1}{X}$ e, se esistono, il valore atteso e la varianza di Y.

$3/10$ ......, $1/20$ ......, $\begin{cases} \frac{6(t-1)}{t^4} & t>1 \\ 0 & t\le 1 \end{cases}$ ......, 3 ......, $+\infty$ ......

Svolgimento $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 (6x^2 - 6x^3)\,dx = 2x^3 - \frac{3}{2}x^4 \Big|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 (6x^3 - 6x^4)\,dx = \frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5 \Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{15-12}{10} = \frac{3}{10}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$$

$$Y = \varphi \circ X \qquad \varphi(t) = \frac{1}{t}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,\mathbb{P}_Y(dt) = \int_{\mathbb{R}} \psi \circ \varphi(s)\,\mathbb{P}_X(ds) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{1}{s}\right) f(s)\,ds = \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{s}\right) 6(s - s^2)\,ds \qquad t = \frac{1}{s} \quad s = \frac{1}{t}$$

$$ds = -\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= \int_1^{+\infty} \psi(t)\, 6\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^{+\infty} \psi(t)\,\frac{6(t-1)}{t^4}\,dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi(t) g(t)\,dt \qquad g(t) = \begin{cases} \frac{6(t-1)}{t^4} & t > 1 \\ 0 & t \le 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} t g(t)\,dt = \int_1^{+\infty} 6\,\frac{t^2 - t}{t^4}\,dt = \int_1^{+\infty}\left(\frac{6}{t^2} - \frac{6}{t^3}\right)dt =$$

$$= -\frac{6}{t} + \frac{3}{t^2}\Big|_{t=1}^{t\to+\infty} = 6 - 3 = 3$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} t^2 g(t) = \int_1^{+\infty} 6\,\frac{t^3 - t^2}{t^4}\,dt = \int_1^{+\infty}\left(\frac{6}{t} - \frac{6}{t^2}\right)dt = +\infty$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}[Y] = +\infty$$

Domanda 3) Sia $f(x) = \left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ e sia X una v.a. di distribuzione $\mathbb{P}_X = f(x)\mathrm{d}x$.
Calcolare valore atteso e varianza di X.
Calcolare la densità della v.a. $Y := \frac{1}{X}$ e, se esistono, il valore atteso e la varianza di Y.

$25/36$ ..., $8/15$ ..., $\begin{cases} \frac{4t+3}{3t^4} & t>1 \\ 0 & t\le 1 \end{cases}$ ..., $11/6$ ..., $+\infty$ ...

Svolgimento $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{4}{3}x^2\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{4}{9}x^3 \Big|_0^1$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{9+16}{36} = \frac{25}{36}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{4}{3}x^3\right) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{1}{3}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathbb{P}_Y(dt) = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \mathbb{P}_X(ds) = \int_0^1 \varphi\left(\frac{1}{s}\right)\left(s^2 + \frac{4}{3}s\right) ds \qquad t = \frac{1}{s}$$

$$s = \frac{1}{t}$$

$$= \int_1^{+\infty} \varphi(t) \left(\frac{1}{t^2} + \frac{4}{3t}\right) \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\frac{4t+3}{3t^4}\,dt \qquad ds = -\frac{1}{t^2}dt$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}_Y = g(t)\,dt \quad \text{con} \quad g(t) = \begin{cases} \frac{4t+3}{3t^4} & t>1 \\ 0 & t \le 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_1^{+\infty} \frac{4t^2+3t}{3t^4}\,dt = \int_1^{+\infty} \left(\frac{4}{3}\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}\right) dt = -\frac{4}{3}\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}\Big|_{t=1}^{t\to+\infty}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{8+3}{6} = \frac{11}{6}$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_1^{+\infty} \frac{4t^3+3t^2}{3t^4}\,dt = +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}[Y] = +\infty$$

Domanda 4) Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Verificare che la successione

$$p_n := \frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \frac{1}{na^n}, \qquad n \geq 1$$

definisce una densità di probabilità concentrata sugli interi positivi. Se X è una variabile aleatoria discreta con distribuzione associata a questa densità, calcolare valore atteso e varianza di X.

$\frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \frac{1}{a-1}$, $\frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \frac{a}{(a-1)^2}$, $-\left(\frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)}\right)^2 \frac{1}{(a-1)^2}$

Svolgimento $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na^n} = \log\left(\frac{a}{a-1}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad x := \frac{1}{a} \in (0,1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\log|t-1| \Big|_{t=0}^{t=x}$$

$$= -\log|x-1| = -\log\left(1-\frac{1}{a}\right) = -\log\left(\frac{a-1}{a}\right) = \log\left(\frac{a}{a-1}\right) \checkmark$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{a}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\log\frac{a}{a-1}} \left(\frac{a}{a-1} - 1\right) = \frac{1}{\log\frac{a}{a-1}} \frac{1}{a-1}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n = \frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \Big|_{x=\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n =$$

$$= \frac{x}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{\log\frac{a}{a-1}} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) =$$

$$1 - x = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$$

$$= \frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \frac{1}{\cancel{a}} \frac{a^{\cancel{2}}}{(a-1)^2}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \frac{a}{(a-1)^2} - \left(\frac{1}{\log\left(\frac{a}{a-1}\right)} \frac{1}{a-1}\right)^2$$