Primo Compitino – 14 Novembre 2016

Matricola **Nome e Cognome**

Domanda 1) Gamba di Legno ha n nascondigli. Dopo ogni evasione si rifugia in una di essi con probabilità $\frac{1}{n}$. Sia θ_i la probabilità che il Commissario Basettoni scovi Gamba di Legno nel rifugio i-esimo, $i = 1, \ldots, n$, quando Gamba di Legno si sta effettivamente nascondendo lì. Qual è la probabilità condizionata che Gamba di Legno si trovi nel nascondiglio i-esimo sapendo che il Commissario Basettoni non lo ha scovato nel nascondiglio numero 1?

...., ..., ...

Svolgimento N_i = Gamba di Legno si nasconde nel rifugio i-esimo

$\mathbb{P}(N_i) = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1 \ldots n$

S_i = Basettoni scova gamba di Legno nel rifugio i-esimo

$\mathbb{P}(S_i \mid N_i) = \theta_i$

$? \ \mathbb{P}(N_i \mid S_1^c) = ?$

$$\mathbb{P}(N_i \mid S_1^c) = \frac{\mathbb{P}(S_1^c \mid N_i)\mathbb{P}(N_i)}{\mathbb{P}(S_1^c)}$$

$$\mathbb{P}(S_1^c) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(S_1^c \mid N_j)\mathbb{P}(N_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \mathbb{P}(S_1 \mid N_j)\right)\overbrace{\mathbb{P}(N_j)}^{=\frac{1}{n}}$$

$$= (1-\theta_1)\frac{1}{n} + \sum_{j=2}^{n} 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(1-\theta_1) + (n-1)}{n} = \frac{n-\theta_1}{n}$$

perché

$$\mathbb{P}(S_1^c \mid N_j) = 1 - \mathbb{P}(S_1 \mid N_j) = \begin{cases} 1-\theta_1 & j = 1 \\ 1 & j = 2, \ldots n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N_i \mid S_1^c) = \begin{cases} \frac{1-\theta_1}{n-\theta_1} & i = 1 \\ \frac{1}{n-\theta_1} & i = 2, \ldots n \end{cases}$$

Domanda 2) Si lancia ripetutamente una moneta, su cui ad ogni lancio si ottiene testa con probabilità p, e croce con probabilità $1-p$. Calcolare la probabilità di ottenere testa in almeno due lanci consecutivi.
Qual è il valore atteso del numero di lanci che devo fare per osservare almeno due teste consecutive?

...., ...

Svolgimento

Per $n \in \mathbb{N}$ pongo $T_n :=$ stringhe dei risultati dei primi n lanci che finiscono per Testa e in cui non ci sono due Teste consecutive

$C_n :=$ stringhe dei risultati dei primi n lanci che finiscono per croce e in cui non ci sono due Teste consecutive

$B_n :=$ stringhe dei risultati dei primi n lanci che finiscono per due Teste consecutive e in cui non ci sono altre due Teste consecutive

L'evento che ci interessa è $\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n$ e $B_n \cap B_k = \emptyset$

$T_2 = \{(C,T)\}$ $\quad \mathbb{P}(T_2) = pq = p(1-p)$ $\quad q := 1-p$

$C_2 = \{(T,C), (C,C)\}$ $\quad \mathbb{P}(C_2) = pq + q^2 = q(p+q) = q = 1-p$

$B_2 = \{(T,T)\}$ $\quad \mathbb{P}(B_2) = p^2$

$T_n = C_{n-1} \times \{T\} \Rightarrow \mathbb{P}(T_n) = p\,\mathbb{P}(C_{n-1})$

$C_n = (C_{n-1} \times \{C\}) \cup (T_{n-1} \times \{C\}) \Rightarrow \mathbb{P}(C_n) = q\,(\mathbb{P}(C_{n-1}) + \mathbb{P}(T_{n-1}))$

$B_n = T_{n-1} \times \{T\} \Rightarrow \mathbb{P}(B_n) = p\,\mathbb{P}(T_{n-1})$

$$\mathbb{P}(C_n) = q\left(\mathbb{P}(C_{n-1}) + \mathbb{P}(T_{n-1})\right) = q\,\mathbb{P}(C_{n-1}) + qp\,\mathbb{P}(C_{n-2})$$

$\mathbb{P}(C_n) - q\,\mathbb{P}(C_{n-1}) - qp\,\mathbb{P}(C_{n-2}) = 0$ $\quad \lambda^2 - q\lambda - pq = 0$

$\Delta = q^2 + 4pq > 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(C_n) = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2$ radici reali $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\mathbb{P}(C_2) = 1-p$

$\mathbb{P}(C_3) = q\left(\mathbb{P}(C_2) + \mathbb{P}(T_2)\right) = q\left(1-p+p(1-p)\right) = (1-p)(1-p^2) = (1-p)^2(1+p)$

Imponendo i valori di $\mathbb{P}(C_2)$ e $\mathbb{P}(C_3)$ determino α e β

$\mathbb{P}(T_n) = p\,\mathbb{P}(C_{n-1}) = \alpha p\,\lambda_1^{n-1} + \beta p\,\lambda_2^{n-1}$

$\mathbb{P}(B_n) = p\,\mathbb{P}(T_{n-1}) = p^2\alpha\,\lambda_1^{n-2} + p^2\beta\,\lambda_2^{n-2}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(p^2\alpha\,\lambda_1^{n-2} + p^2\beta\,\lambda_2^{n-2}\right) = \frac{p^2\alpha}{1-\lambda_1} + \frac{p^2\beta}{1-\lambda_2}$$

Domanda 3) Sia $f(x) = x\exp(-x)\mathbb{1}_{(0,+\infty)}$ e sia X una v.a. di distribuzione $\mathbb{P}_X = f(x)\mathrm{d}x$.
Calcolare valore atteso e varianza di X; calcolare la legge e mostrare che la mediana è minore del valore atteso. Scrivere la disuguaglianza di Markov per la v.a. X e la funzione $\varphi(t) = t^+$ e scrivere la disuguaglianza di Chebychev per la v.a. X.

$\mathbb{E}[X] =$ ..... 2 ....., Var[X] $=$ ..... 2 ....., $F_X(t) =$ ..... $\begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1-(t+1)e^{-t} & t > 0 \end{cases}$ .....,

..... $t\,\mathbb{P}(X>t) \le \mathbb{E}[X] \quad \forall t > 0$ ....., ... $\mathbb{P}(|X-2|>t) \le \frac{2}{t^2} \quad \forall t > 0$ .....

Svolgimento $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1$ ok

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x} dx = 2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 3x^2 e^{-x} dx =$$

$$= 3\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 3 \cdot 2 = 6$$

$\Rightarrow \operatorname{Var}[X] = 6 - 2^2 = 2$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \int_0^t x e^{-x} dx & t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1-(t+1)e^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^t x e^{-x} dx = -xe^{-x}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^t = 1-(t+1)e^{-t}$$

$F_X(2) = 1 - 3e^{-2}$

$3 < e < 4 \qquad \frac{1}{16} < e^{-2} < \frac{1}{9} \qquad \frac{3}{16} < 3e^{-2} < \frac{1}{3} \qquad \frac{2}{3} < F_X(2) < \frac{13}{16}$

$\Rightarrow F_X(2) > \frac{1}{2} \Rightarrow t_M < 2$

$t\,\mathbb{P}(X^+ > t) \le \mathbb{E}[X^+]$ ma $X^+ = X$ $\mathbb{P}$-qc $\Rightarrow$

$t\,\mathbb{P}(X>t) \le \mathbb{E}[X]$

$\mathbb{P}(|X-2|>t) \le \frac{2}{t^2} \quad \forall t > 0$

Domanda 4) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione assolutamente continua di densità $f(x)$. Calcolare la densità $g(x)$ della distribuzione $\mathbb{P}_{1-X^2}$. Quanto vale g, se

$$f(x) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{(-2,-1)}(x) + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{(1,2)}(x)?$$

. ..., ...

Svolgimento $Y = 1 - X^2 \qquad Y = 1 - Z \qquad Z = X^2 \qquad Y = 1 + (-1) Z$

$\mathbb{P}_Z = h(x)dx \qquad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

$\mathbb{P}_Y = g(x)dx \qquad g(x) = \frac{1}{|-1|} h\left(\frac{x-1}{-1}\right) = h(1-x) =$

$= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\left(f(\sqrt{1-x}) + f(-\sqrt{1-x})\right) & 1-x > 0 \\ 0 & 1-x \leq 0 \end{cases}$

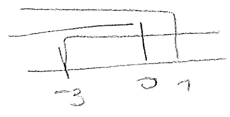
$= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\left(f(\sqrt{1-x}) + f(-\sqrt{1-x})\right) & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$

Se $f(x)$ è quella? $\qquad \sqrt{1-x} \in (-2,-1)$ MAI

$\sqrt{1-x} \in (1,2) \qquad 1 < \sqrt{1-x} < 2$

$\begin{cases} x \leq 1 \\ 1 < 1-x < 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 1 \\ 1 < 1-x \\ 1-x < 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 1 \\ x < 0 \\ x > -3 \end{cases}$

$x \in (-3, 0)$



$-\sqrt{1-x} \in (-2,-1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} \in (1,2)$ sse $x \in (-3,0)$

$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\left\{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right\} & x \in (-3,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x}} & x \in (-3,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

<u>Oppure</u> $Y = 1 - X^2 = \varphi \circ X \qquad \varphi(t) = 1 - t^2$

ψ di Borel non negativa

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\, \mathbb{P}_Y(dt) = \int_{\mathbb{R}} \psi(\varphi(s))\, \mathbb{P}_X(ds) = \int_{\mathbb{R}} \psi(1-s^2) f(s)\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \psi(1-s^2) f(s)\, ds + \int_{0}^{+\infty} \psi(1-s^2) f(s)\, ds$$

$t = 1 - s^2 \qquad\qquad t = 1 - s^2$

$s = -\sqrt{1-t} \qquad\qquad s = \sqrt{1-t}$

$ds = \dfrac{dt}{2\sqrt{1-t}} \qquad\qquad ds = \dfrac{-dt}{2\sqrt{1-t}}$

$$\int_{-\infty}^{1} \psi(t) f(-\sqrt{1-t}) \frac{1}{2\sqrt{1-t}}\, dt + \int_{1}^{-\infty} \psi(t) f(\sqrt{1-t}) \frac{-1}{2\sqrt{1-t}}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{1} \psi(t) \frac{1}{2\sqrt{1-t}} \left(f(-\sqrt{1-t}) + f(\sqrt{1-t}) \right) dt$$

$$\Rightarrow \quad g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-t}} \left(f(-\sqrt{1-t}) + f(\sqrt{1-t}) \right) & t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$