LEGGE E DISTRIBUZIONE

Note Title 26/10/2016

PROP $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato. $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a.

Sia $\mathcal{F}_X := \{A \subset \mathbb{R} : X^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}$

Allora $\mathcal{F}_X$ è una σ-algebra che contiene $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

DIM Abbiamo già visto che $\mathcal{F}_X \supseteq \mathcal{A}$ famiglia degli aperti di $\mathbb{R}$. Basta quindi dimostrare che $\mathcal{F}_X$ è una σ-algebra di $\mathbb{R}$.

Sia $A \in \mathcal{F}_X$ e considero $A^c = \mathbb{R} \setminus A = (\overline{\mathbb{R}} \setminus A) \setminus \{-\infty, +\infty\}$
$= \overline{\mathbb{R}} \setminus \{A, +\infty, -\infty\}$

$X^{-1}(A^c) = X^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = X^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{A, +\infty, -\infty\}) =$
$= \Omega \setminus X^{-1}(\{A, +\infty, -\infty\}) = \Omega \setminus (\underbrace{X^{-1}(A) \cup X^{-1}(+\infty) \cup X^{-1}(-\infty)}_{\in \mathcal{E}})$
$\in \mathcal{E}$

Sia $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}_X$ $\quad X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i) \in \mathcal{E}$

$\emptyset \in \mathcal{F}_X \quad X^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{E}$

COROLLARIO Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Sono equivalenti:

1) X è una v.a.

2) $X^{-1}(+\infty)$ e $X^{-1}(-\infty) \in \mathcal{E}$ e $X^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

— o —

Sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Chiamo LEGGE di X la funzione

$F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leq t) \in \mathbb{R}$

Si chiama anche FUNZIONE DI RIPARTIZIONE di X
LEGGE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA di X
(FUNZIONE)

PROPRIETÀ

0 $F_X(\mathbb{R}) \subseteq [0,1]$

1 F_X è monotona non decrescente

dim $s, t \in \mathbb{R}$ $s < t$ $\{X \le s\} \subseteq \{X \le t\}$

$\mathbb{P}(X \le s) \le \mathbb{P}(X \le t)$ $F_X(s) \le F_X(t)$.

2 $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = \mathbb{P}(X = -\infty)$

Sia $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ $t_n \searrow -\infty$ $\begin{cases} t_n \le t_{n-1} \\ \lim_{n \to +\infty} t_n = -\infty \end{cases}$

$$\{X = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \le t_n\}$$

$$\mathbb{P}(X = -\infty) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X \le t_n) = \lim_{n \to \infty} F_X(t_n)$$

per l'arbitrarietà della successione

$$\mathbb{P}(X = -\infty) = \lim_{t \to -\infty} F_X(t)$$

3 $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$

Sia $\{t_n\}$ $t_n \nearrow +\infty$ $\{X \le t_n\} \subseteq \{X \le t_{n+1}\}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \le t_n\} = \underline{\{X = -\infty\} \cup \{X \in \mathbb{R}\}} = \Omega \setminus \{X = +\infty\}$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X \le t_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \le t_n\}\right) = \mathbb{P}(\Omega \setminus \{X = +\infty\})$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$$

Per l'arbitrarietà della successione

$$\lim_{t \to +\infty} \underbrace{\mathbb{P}(X \le t)}_{F_X(t)} = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$$

4 F_X è continua da destra in ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{s \to t^+} F_X(s) = F_X(t)$$

Sia $\{s_n\}$ t.c. $s_n \searrow t$

$$\{X \le s_n\} \subseteq \{X \le s_{n-1}\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \le s_n\} = \{X \le t\}$$

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \le s_n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \le s_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} F_X(s_n)$$

Per l'arbitrarietà della successione $F_X(t) = \lim_{s\to t^+} F_X(s)$

5 $\lim_{s\to t^-} F_X(s) = F_X(t) - \mathbb{P}(X=t)$

6 (corollario di 5+1: l'insieme $\{t\in\mathbb{R}: \mathbb{P}(X=t)>0\}$ è al più numerabile)

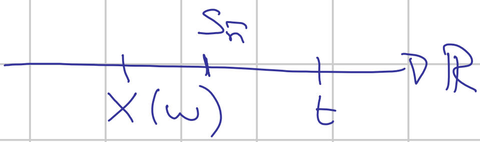
Sia $\{s_n\}$ $s_n \nearrow t$ $\qquad \{X\le s_n\} \subseteq \{X \le s_{n+1}\}$

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \le s_n\} = \{X<t\}$

$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \le s_n\}$ $\qquad \exists \bar n$ t.c. $X(\omega) \le s_{\bar n} < t$

$\Rightarrow \omega \in \{X<t\}$

$\omega \in \{X<t\}$



$\exists \bar n$ t.c. $X(\omega) \le s_{\bar n}$

$\Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \le s_n\}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X\le s_n\} = \{X<t\} = \{X\le t\} \setminus \{X=t\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X\le s_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X\le s_n\}\right) = \mathbb{P}(X\le t) - \mathbb{P}(X=t)$$
$$= F_X(t) - \mathbb{P}(X=t)$$

Per l'arbitrarietà di $s_n \nearrow t$

$$\lim_{s\to t^-} F_X(s) = F_X(t) - \mathbb{P}(X=t)$$

— o —

$\Omega = \{1,2,\dots,6\}^2 \qquad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega) \qquad \mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\}) = \frac{1}{36}$

$X(\omega_1,\omega_2) = \omega_1 + \omega_2$

$X(\Omega) = \{2,3,\dots,12\}$

$F_X(t) = 0 \qquad t<2$

$F_X(2) = \mathbb{P}(X\le 2) = \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{36}$

$$F_X(t) = \frac{1}{36} \quad \forall t \in [2,3)$$

$$F_X(3) = \mathbb{P}(X \le 3) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) =$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$F_X(t) = \frac{1}{12} \quad \forall t \in [3,4)$$

—— o ——

n monete.

$T \to 1$ $\quad \Omega = \{0,1\}^n \quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

$C \to 0$ $\quad \mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots \omega_n)\}) = p^{\#\text{Teste}} (1-p)^{\#\text{croci}}$

$$\#\text{Teste} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \qquad X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots n\}$$

$$F_X(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

$$F_X(0) = \mathbb{P}(X \le 0) = \mathbb{P}(X=0)$$

$$\{X=0\} = \{(0,0,\dots 0)\} \Rightarrow F_X(0) = (1-p)^n$$

$t \in [0,1)$ $\quad F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}(X=0) = (1-p)^n$

$t=1$ $\quad F_X(1) = \mathbb{P}(X \le 1) = \underbrace{\mathbb{P}(X=0)}_{(1-p)^n} + \underbrace{\mathbb{P}(X=1)}_{np(1-p)^{n-1}}$

Se $X(\omega) = 1$ $\quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p^1 (1-p)^{n-1}$

Sia $k \in \{0, \dots n\}$ $\quad \mathbb{P}(X=k)$

se $\bar{\omega}$ t.c. $X(\bar{\omega}) = k$ $\quad \mathbb{P}(\{\bar{\omega}\}) = p^k (1-p)^{n-k}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{\bar{\omega} \in \{X=k\}} \mathbb{P}(\{\bar{\omega}\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, \dots n$$

—— o ——

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a.

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad X^{-1}(A) = \{X \in A\} \in \mathcal{E} \Rightarrow$ è ben definita

$\mathbb{P}(X \in A)$

Considero la funzione $\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \in \mathbb{R}$

$\mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}(X \in \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \in A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_X(A_i)$$

$\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) \in [0, 1]$

$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1 \iff \mathbb{P}(X = -\infty) = \mathbb{P}(X = +\infty) = 0$

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

$\mathcal{E}(X) := \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

$\mathcal{E}(X) \subseteq \mathcal{E}$

PROPRIETÀ: $\mathcal{E}(X)$ è una σ-algebra di Ω

DIM $B \in \mathcal{E}(X) \Rightarrow \exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B = X^{-1}(A)$

$$\Omega \setminus B = X^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus A) = X^{-1}(\underbrace{\mathbb{R} \setminus A}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}) \in \mathcal{E}(X)$$

$\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}(X) \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \exists A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B_i = X^{-1}(A_i)$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i) = X^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}\Big) \in \mathcal{E}(X)$$

ESEMPIO $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. con $X(\Omega)$ finito o numerabile

$X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in J} \quad J = \{1 \ldots n\}$ o $\mathbb{N}$

$E_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\} = \{X = x_i\} \quad \forall i \in J$

$\{E_i\}_{i \in J}$ è una partizione finita o numerabile di Ω in eventi.

$\mathcal{E}(X) = \sigma(\{E_i\}_{i \in J})$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ $\quad X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ v.a.

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ $\quad \mathbb{P}_X$ si dice DISTRIBUZIONE di X

Lavoriamo nel caso in cui $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(X = -\infty) = 0$

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}(X \in [-\infty, t]) =$$
$$= \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X = -\infty)}}_{=0} + \mathbb{P}(X \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}_X((-\infty, t])$$

1° CASO $\quad X(\Omega)$ è un insieme finito o numerabile

$X(\Omega) = \{t_j\}_{j \in J} \quad J = \{1, \dots, n\}$ o $J = \mathbb{N}$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathbb{P}(X \in A) \qquad \{X \in A\} = \bigcup_{t_j \in A} \{X = t_j\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{t_j \in A} \mathbb{P}(X = t_j)$$

Per $j \in J$ pongo $p_j := \mathbb{P}(X = t_j)$

$\{p_j\}_{j \in J}$ si dice vettore (o successione) delle densità discrete.

N.B. $\quad p_j \in [0, 1] \quad \forall j \in J \qquad \sum_{j \in J} p_j = 1$

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, t]) = \sum_{t_j \le t} \mathbb{P}(X = t_j) = \sum_{t_j \le t} p_j$$

$$F_X(t) - \lim_{s \to t^-} F_X(s) = \mathbb{P}(X = t)$$

$\mathbb{P}(X = t) \neq 0 \quad$ SSE $\quad t \in \{t_j\}_{j \in J}$ e $p_j > 0$

X si dice V.A con distribuzione discreta

V.A con distribuzione A.C. (assolutamente continua)

X si dice V.A. con distribuzione A.C. se

$\exists f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ t.c. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$ e

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x)\,dx$

In particolare $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(X = -\infty) = 0$

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, t]) = \int_{(-\infty, t]} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow F_X$ è una funzione continua e dunque

$\mathbb{P}(X = t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.