TEOREMA DI CARATHÉODORY

Note Title 17/10/2016

Ω insieme non vuoto, $\mathcal{A}$ anello su Ω

$\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ funzione σ-additiva

Allora è possibile estendere μ ad una misura su $\mathcal{E} := \sigma(\mathcal{A})$

Inoltre, se μ è σ-finita su $\mathcal{A}$, allora l'estensione è unica.

DIM DELL'ESISTENZA

Per $E \subseteq \Omega$ $\quad E \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A} \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

$\mu^*: \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ si dice MISURA ESTERNA

PROPRIETÀ DELLA MISURA ESTERNA

1) μ^* è monotona crescente rispetto all'inclusione insiemistica.

$E, F \in \mathcal{P}(\Omega) \quad E \subseteq F$

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \quad F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

$\Rightarrow$ per l'arbitrarietà della famiglia $\{A_i\}$ ho $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$

2) A) $\mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A} \quad \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ scelgo $A_1 = A$,

$A_i = \emptyset \quad \forall i \geq 2$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(A_1) = \mu(A)$$

3) $A \in \mathcal{A}$ e $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ t.c. $A_i \in \mathcal{A} \ \forall i \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq A$

μ è σ-additiva e dunque σ-subadditiva $\Rightarrow$

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Per l'arbitrarietà della famiglia $\mu(A) \leq \mu^*(A)$

3) $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,+\infty]$ è σ-subadditiva

Sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

Devo dimostrare che $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$

Se $\exists i$ t.c. $\mu^*(E_i) = +\infty$ non c'è niente da dimostrare.

Suppongo quindi $\mu^*(E_i) < +\infty \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Sia $\varepsilon > 0$: $\forall i \in \mathbb{N} \quad \exists \{A_{ij}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{Q}$ t.c.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_{ij}) < \mu^*(E_i) + \varepsilon 2^{-i} \quad \leftarrow$$

$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$? $\qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mu(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) < \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^*(E_i) + \varepsilon 2^{-i}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)\right) + \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}}_{1}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ otteniamo la Tesi.

Sia $A \subseteq \Omega$. Dico che A è un INSIEME ADDITIVO SECONDO CARATHÉODORY se:

$\forall E \in \mathcal{P}(\Omega) \qquad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$

<u>OSSERVAZIONE</u> Sicuramente $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$
$\forall E, \forall A$

PROPRIETÀ DEGLI INSIEMI ADDITIVI

1) $\emptyset$ è un insieme additivo

$$\mu^*(E) \overset{?}{=} \mu^*(E \cap \emptyset) + \mu^*(\underbrace{E \cap \emptyset^c}_{= \Omega}) = \overset{0}{\mu^*(\emptyset)} + \mu^*(E)$$

Ω è un insieme additivo

$$\mu^*(E) \overset{?}{=} \mu^*(\underbrace{E\cap\Omega}_{E}) + \mu^*(\underbrace{E\cap\Omega^c}_{\emptyset}) = \mu^*(E)+0$$

2) Se A è additivo $\Rightarrow$ A^c è additivo : ovvio

3) Sia A insieme additivo, $B\subseteq\Omega$ qualsiasi t.c. $A\cap B=\emptyset$

allora $\mu^*(A\cup B) = \mu^*(A)+\mu^*(B)$

Scelgo $E = A\cup B$. Poiché A è additivo

$$\mu^*(A\cup B) = \mu^*((A\cup B)\cap A) + \mu^*((A\cup B)\cap A^c) =$$
$$= \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

$\mathcal{G} := \{A\in\mathcal{P}(\Omega) : A$ è un insieme additivo secondo Carathéodory$\}$

<u>TEOREMA</u> $\mathcal{G}$ è una σ-algebra di Ω e $\mathcal{G}\supseteq\mathcal{a}$

$\mu^*|_{\mathcal{G}}$ è una misura su $(\Omega,\mathcal{G})$

<u>DIM</u> Sia $E\subseteq\Omega$, $A\in\mathcal{a}$. Devo dimostrare che

$$\mu^*(E)\geq\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$$

Se $\mu^*(E)=+\infty$ non c'è niente da dimostrare

Se $\mu^*(E)<+\infty$ $\exists\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{a}$ $E\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i)\leq\mu^*(E)+\varepsilon$$

$$\varepsilon+\mu^*(E)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu(B_i\cap A)+\mu(B_i\cap A^c)\right)$$

$B_i\cap A\in\mathcal{a}$ perché μ è σ-additiva

$B_i\cap A^c = B_i\setminus A\in\mathcal{a}$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i\cap A)\right)+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i\cap A^c)\right)$$

$B_i \cap A \in \mathcal{Q} \quad \forall i$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supseteq E \quad \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \cap A) \supseteq E \cap A \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i \cap A) \geq \mu^*(E \cap A)$

$B_i \setminus A \in \mathcal{Q} \quad \forall i$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supseteq E \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A) \supseteq E \setminus A = E \cap A^c \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A^c)$

$\Rightarrow \quad \varepsilon + \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ ottengo la Tesi.

2°) $\mathcal{G}$ è un'algebra e $\mu^*|_{\mathcal{G}}$ è una funzione additiva

Siano $A, B \in \mathcal{G}$. Devo dimostrare che $A \cup B \in \mathcal{G}$

Sia $E \subseteq \Omega$. Poiché $A \in \mathcal{G}$

$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$. Poiché $B \in \mathcal{G}$

$= \underbrace{\mu^*(E \cap A) + \mu^*((E \cap A^c) \cap B)}_{\geq \mu^*(E \cap (A \cup B))} + \mu^*(\underbrace{(E \cap A^c) \cap B^c}_{E \cap (A^c \cap B^c)})$

$E \cap (A \cup B)^c$

$(E \cap A) \cap (E \cap A^c \cap B) = \emptyset$

$(E \cap A) \cup (E \cap A^c \cap B) = E \cap (A \cup B)$

$x \in (E \cap A) \cup (E \cap A^c \cap B)$

Se $x \in E \cap A \subseteq E \cap (A \cup B)$

Se $x \in E \cap A^c \cap B \subseteq E \cap B \subseteq E \cap (A \cup B)$

$x \in E \cap (A \cup B) \quad \begin{cases} x \in E \\ x \in A \cup B \end{cases}$

$\begin{cases} x \in E \\ x \in A \end{cases} \Rightarrow x \in E \cap A \qquad \begin{cases} x \in E \\ x \notin A \Rightarrow x \in B \end{cases} \qquad x \in E \cap B \cap A^c$

$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{G}$

e dunque $\mathcal{G}$ è un'algebra

Se $A, B \in \mathcal{G} \quad A \cap B = \emptyset \quad E = A \cup B$

$$\mu^*(A\cup B) = \mu^*((A\cup B)\cap A) + \mu^*((A\cup B)\cap A^c)$$
$$\mu^*(A\cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

3° PASSO $\mathcal{G}$ è una σ-algebra

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}$ _ Devo dimostrare che $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$

Se gli A_i non sono a due a due disgiunti

$\tilde{A}_1 = A_1$

$\tilde{A}_2 = A_2 \setminus A_1$

$\vdots$

$\tilde{A}_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i = B$

$\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j = \emptyset$

$\tilde{A}_i \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow$ Slg suppongo che gli A_i siano a due a due disgiunti

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{G} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mu^*(E) \overset{???}{\geq} \mu^*(E\cap B) + \mu^*(E\cap B^c) \qquad \forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mu^*(E\cap B) + \mu^*(E\cap B^c) =$$
$$\mu^*\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \mu^*(E\cap B^c) =$$
$$= \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E\cap A_i)\right) + \mu^*(E\cap B^c)$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E\cap A_i)\right) + \mu^*(E\cap B^c)$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E\cap A_i)\right) + \underline{\mu^*(E\cap B^c)}$$

$B \supseteq B_n$

$B^c \subseteq B_n^c$

$E\cap B^c \subseteq E\cap B_n^c$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu^*(E\cap B^c) \leq \mu^*(E\cap B_n^c)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu^*(E\cap B) + \mu^*(E\cap B^c) \leq \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu^*(E\cap A_i)\right) + \mu^*(E\cap B_n^c),$$

$$\mu^*(E\cap B)+\mu^*(E\cap B^c)\le \limsup_n\left\{\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mu^*(E\cap A_i)}_{\mu^*(E\cap B_n)}\right)+\mu^*(E\cap B_n^c)\right\}$$

$$\mu^*(E\cap B)+\mu^*(E\cap B^c)\le \limsup_n\left\{\underbrace{\mu^*(E\cap B_n)+\mu^*(E\cap B_n^c)}_{\mu^*(E) \text{ perché } B_n\in\mathcal{G}}\right\}$$

$$\mu^*(E\cap B)+\mu^*(E\cap B^c)\le \mu^*(E) \quad \text{cioè } B\in\mathcal{G}$$

$\sum_{i=1}^{n}\mu^*(E\cap A_i)=\mu^*(E\cap B_n)$ si dimostra per induzione

$n=1$ è banalmente vera

Supponiamo sia vera fino a $n-1$

$$\sum_{i=1}^{n}\mu^*(E\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n-1}\mu^*(E\cap A_i)+\mu^*(E\cap A_n)=$$

$$=\mu^*(E\cap B_{n-1})+\mu^*(E\cap A_n)\overset{?}{=}\mu^*(E\cap B_n)$$

perché $A_n\in\mathcal{G}$

$$\mu^*(E\cap B_n)=\mu^*(\underbrace{E\cap B_n\cap A_n}_{E\cap A_n})+\mu^*(\underbrace{E\cap B_n\cap A_n^c}_{E\cap\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i=E\cap B_{n-1}})=$$

— o —

Esercizi

A N A G R A M M A

$A_1\ N\ A_2\ G\ R\ A_3\ M_1\ M_2\ A_4$ $\qquad \dfrac{9!}{4!\,2!}$

M A T E M A T I C A

$M_1\ A_1\ T_1\ E_1\ M_2\ A_2\ T_2\ I\ C\ A_3$ $\qquad \dfrac{10!}{3!\,2!\,2!}$

— o —

$(x \quad y \quad z \quad t)$

$(x \,,\; x+y \,,\; x+y+z \,,\; x+y+z+t)$

$$x = u$$
$$x+y = v$$
$$x+y+z = w$$
$$x+y+z+t = a$$

$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}$

$f(1) = x$

$f(2) = x+y$

$f(3) = x+y+z$

$f(4) = x+y+z+t$

$f : \{1, 2, 3\} \to \{1, \ldots N-1\}$

f strettamente crescente

$$\binom{N-1}{3}$$

$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, \ldots N\}$

f strettamente crescente

$$\binom{N}{4}$$

— o —

$f : \{1, 2, 3\} \to \{0, \ldots N\}$

f non decrescente

$$\binom{N+1+3-1}{3} = \binom{N+3}{3}$$

$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{0, \ldots N\}$

$$\binom{N+1+4-1}{4} = \binom{N+4}{4}$$