COSTRUZIONE DI MISURE

Note Title 12/10/2016

MASSA DI DIRAC

$\Omega \neq \emptyset \quad \bar{\omega} \in \Omega \quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall A \subset \Omega \quad \mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 & A \ni \bar{\omega} \\ 0 & A \not\ni \bar{\omega} \end{cases}$

Ω insieme finito $\quad \Omega = \{\omega_1 \ldots \omega_n\}$

$p_1, \ldots, p_n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad p_i \in \mathbb{R}$

$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega) \qquad \forall i \in \{1 \ldots n\} \quad \{\omega_i\} \in \mathcal{E}$

Pongo $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) := p_i \quad \forall i = 1 \ldots n$

$A \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(A) = ? \quad A = \bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\} \quad \mathbb{P}(A) := \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}'(\{\omega_i\})$

$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega_i \in A} p_i$

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ sicuramente vera

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \quad A_i \subset \Omega \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ perché $A_i = \emptyset \quad \forall i > k$

$A_i = \bigcup_{\omega_j \in A_i} \{\omega_j\} \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\omega_j \in A_i} \{\omega_j\}$

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\omega_j \in A_i} p_j = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\} \qquad \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = c$

$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} c = nc \implies c = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}$

$A \subseteq \Omega$

$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$\Rightarrow$ Abbiamo ritrovato la definizione di probabilità secondo Pascal: $\dfrac{\#\text{casi favorevoli}}{\#\text{casi possibili}}$

— o —

Ω insieme numerabile $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$

$\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ $p_i \in \mathbb{R}$ $p_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

$\mathcal{E} := \mathcal{P}(\Omega)$ $\forall i \in \mathbb{N}$ pongo $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$

$A \subseteq \Omega$ $A = \bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\}$ $\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ sicuramente

$\mathbb{P}(\Omega)$ $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega_i\}$ $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ $A_i \subset \Omega$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $A_i = \bigcup_{\omega_j \in J_i} \{\omega_j\}$

$J_i \subseteq \mathbb{N}$ finito o numerabile $J_i \cap J_j = \emptyset$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j \in J_i} \{\omega_j\}$ $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j \in J_i} p_j = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio di misura.

$\mathbb{P}$ si dice una MISURA FINITA se $\mathbb{P}(\Omega) < +\infty$

$\mathbb{P}$ si dice una MISURA σ-FINITA se

$\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{P}(A_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$

— o —

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di misura

$B \in \mathcal{E}$ si dice $\mathbb{P}$-trascurabile se $\mathbb{P}(B) = 0$

Dico che una proprietà $P(x)$ definita sugli $x \in \Omega$ vale $\mathbb{P}$-quasiovunque ($\mathbb{P}$-quasicertamente)

se $\mathbb{P}(\{x \in \Omega : P(x) \text{ è falsa}\}) = 0$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio di misura

Pongo

$$\mathcal{E}_{\mathbb{P}} := \{A \subseteq \Omega : \exists B, C \in \mathcal{E} \text{ t.c. } \mathbb{P}(C) = 0, A \Delta B \subseteq C\}$$

Sicuramente $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{\mathbb{P}}$ $(B = A, C = \emptyset)$

Vale: ① $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$ è una σ-algebra

② Per $A \in \mathcal{E}_{\mathbb{P}}$ pongo $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(B)$ dove

$B \in \mathcal{E}$ t.c. $\exists C \in \mathcal{E}$ t.c. $A \Delta B \subseteq C$, $\mathbb{P}(C) = 0$

Devo verificare che se ho $B_1, B_2, C_1, C_2 \in \mathcal{E}$

t.c. $A \Delta B_1 \subseteq C_1$ $\mathbb{P}(C_1) = 0$
$A \Delta B_2 \subseteq C_2$ $\mathbb{P}(C_2) = 0$ $\Rightarrow \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2)$

$B_1 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \setminus B_2)$ $\qquad \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(B_1 \setminus B_2)$

$B_2 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_2 \setminus B_1)$ $\qquad \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(B_2 \setminus B_1)$

Mostro che $B_1 \setminus B_2 \subseteq C_1 \cup C_2$ (analogamente $B_2 \setminus B_1$)

$\mathbb{P}(C_1 \cup C_2) \leq \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(C_2) = 0 + 0 = 0$

$x \in B_1 \setminus B_2$ $\qquad \begin{cases} x \in B_1 \\ x \notin B_2 \end{cases}$

① $x \in A \Rightarrow x \in A \setminus B_2 \subseteq A \Delta B_2 \subseteq C_2 \subseteq C_1 \cup C_2$

② $x \notin A \Rightarrow x \in B_1 \setminus A \subseteq B_1 \Delta A \subseteq C_1 \subseteq C_1 \cup C_2$

③ $(\Omega, \mathcal{E}_{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{P}})$ è ancora uno spazio di misura

e dunque è una misura che estende $\mathbb{P}$ a $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$.

$\Omega \neq \emptyset$ $\quad \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ si dice σ-ALGEBRA su Ω se

1) $\emptyset \in \mathcal{E}$
2) $\forall A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{E}$
3) $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ si dice un ANELLO DI Ω se

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B,\ B \cap A,\ A \setminus B,\ B \setminus A \in \mathcal{A}$

Sia $\mathcal{A}$ un anello di Ω e sia $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$

$\mu : A \mapsto \mu(A)$

Dico che μ è una FUNZIONE ADDITIVA se

$\mu(\emptyset) = 0$

$\forall A, B \in \mathcal{A}$ $\quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

PROPRIETÀ

Se μ è una funzione additiva su ~~un~~ un anello $\mathcal{A}$, allora è monotona crescente rispetto all'unione insiemistica,

DIM Siano $A, B \in \mathcal{A}$ t.c. $A \subseteq B$. Posso scrivere

$$B = A \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{A}} \quad \text{unione disgiunta}$$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$$

— o —

Sia $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una funzione definita sull'anello $\mathcal{A}$

Dico che μ è una funzione σ-additiva se

1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ t.c. $\begin{cases} A_i \cap A_j = \emptyset & i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \end{cases}$

si ha che $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Sia $\mu: \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ funzione definita sull'anello $\mathcal{A}$.
Dico che μ è σ-subadditiva se
1) $\mu(\emptyset)=0$
2) $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ e $\forall B \in \mathcal{A}$ t.c. $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ si ha
$$\mu(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

PROPOSIZIONE Sia $\mathcal{A}$ un anello su un insieme $\Omega \neq \emptyset$ e sia $\mu: \mathcal{A} \to [0,+\infty]$
1) Se μ è sia additiva che σ-subadditiva, allora μ è anche σ-additiva.
2) Se μ è σ-additiva, allora μ è additiva e σ-subadditiva

DIM

① Sia $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ t.c. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$
$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Sicuramente $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$
Devo dimostrare la disuguaglianza opposta
Per $n \in \mathbb{N}$ considero $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

per la monotonia

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

② σ additiva $\Rightarrow$ σ-subadditiva
$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A} \quad B \in \mathcal{A}$ t.c. $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Pongo $\tilde{A}_1 = B \cap A_1 \in \mathcal{A}$ $\qquad \tilde{A}_i \subseteq A_i$

$\tilde{A}_2 = (B \cap A_2) \setminus A_1 \in \mathcal{A}$ $\qquad \tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j = \emptyset$

$\vdots$ $\qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i = B$

$\tilde{A}_k = (B \cap A_k) \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \in \mathcal{A}$

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\mu(\tilde{A}_i)}_{\leq \mu(A_i)\ \forall i \in \mathbb{N}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

PROPOSIZIONE Sia $\mathcal{A}$ un anello su un insieme $\Omega \neq \emptyset$ e sia $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una funzione additiva.

Sono equivalenti:

1) μ è σ-additiva

2) Se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ t.c. $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, allora

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

DIM $1 \Rightarrow 2$ Se $\exists \bar{n}$ t.c. $\mu(A_{\bar{n}}) = +\infty$, allora per la monotonia ho $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \mu(A_{\bar{n}}) = +\infty$

$\mu(A_n) \geq \mu(A_{\bar{n}}) = +\infty \quad \forall n \geq \bar{n}$

Supponiamo quindi $\mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pongo $\tilde{A}_1 = A_1$

$\tilde{A}_2 = A_2 \setminus A_1 \qquad \tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j = \emptyset \quad i \neq j$

$\vdots \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$\tilde{A}_i = A_i \setminus A_{i-1}$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_i) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \underbrace{\mu(A_i \setminus A_{i-1})}_{\mu(A_i) - \mu(A_{i-1})}$$

$$= \mu(A_1) + \lim_{n \to \infty} \sum_{i=2}^{n} \left(\mu(A_i) - \mu(A_{i-1})\right)$$

$$= \cancel{\mu(A_1)} + \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) - \cancel{\mu(A_1)}$$

$2 \Rightarrow 1$ Considero $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ $\quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$

Pongo $A_n := \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

$\Rightarrow A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

TEOREMA DI CARATHÉODORY

Sia Ω insieme non vuoto e sia $\mathcal{A}$ anello di Ω.
Sia $\mathcal{E}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$: $\mathcal{E} := \sigma(\mathcal{A})$
Sia $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ σ-additiva.
Allora μ può essere estesa ad una misura su $\mathcal{E}$
Inoltre l'estensione è unica se μ è σ-finita
cioè se $\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ $\quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$A_n \subseteq A_{n+1}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$