Calcolo delle Probabilità –2015-2016

Secondo Compitino – 11 Dicembre 2015

Matricola **Nome e Cognome** LAURA POGGIOLINI

Domanda 1) X_1 e X_2 sono v.a. indipendenti, identicamente distribuite con distribuzione di Poisson di parametro λ. Sia $Y := X_1 + X_2$. (Si ricorda che $\mathbb{P}_Y = \text{Poisson}(2\lambda)$) Calcolare $\mathbb{P}(X_1 = j | Y = k)$ e $\mathbb{E}[X_1 | Y = k]$.

....

Svolgimento

$$\mathbb{P}(X_1 = j \mid Y = k) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = j,\ X_2 = k-j)}{\mathbb{P}(Y = k)} \neq 0 \quad \text{sse} \quad j \in \{0, 1, \dots k\}$$

per $j \in \{0, 1, \dots k\}$
$$\mathbb{P}(X_1 = j \mid Y = k) = \cancel{e^{-\lambda}} \frac{\cancel{\lambda^j}}{j!} \cancel{e^{-\lambda}} \frac{\cancel{\lambda^{k-j}}}{(k-j)!} \frac{k!}{\cancel{e^{-2\lambda}} (2\cancel{\lambda})^k}$$
$$= \binom{k}{j} 2^{-k}$$

$$\Rightarrow \left(\mathbb{P}_{\{Y=k\}}\right)_{X_1} = B\left(k, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{E}[X_1 \mid Y = k] = \int_\Omega X_1(\omega)\, \mathbb{P}_{\{Y=k\}}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x \left(\mathbb{P}_{\{Y=k\}}\right)_{X_1}(dx) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} j \binom{k}{j} 2^{-k} = 2^{-k} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} j\, x^{j-1} \Big|_{x=1} = 2^{-k} \left(\frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \right) \Big|_{x=1}$$

$$= 2^{-k} \left(\frac{d}{dx} (1+x)^k \right)_{x=1} = 2^{-k} k (1+x)^{k-1} \Big|_{x=1} = \frac{k}{2}$$

Domanda 2) La v.a. bidimensionale (X, Y) ha distribuzione assolutamente continua con densità

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Determinare la densità congiunta di (R, Θ) dove $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$, $\Theta := \begin{cases} \arctan \frac{Y}{X} & X > 0, \\ \pi + \arctan \frac{Y}{X} & X < 0. \end{cases}$

Le v.a. R e Θ sono indipendenti? Determinare le loro densità.

....

Svolgimento

$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di Borel non negativa

$\varphi(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \theta(x,y))$ $\qquad \theta(x,y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x>0 \\ \arctan \frac{y}{x} & x<0 \end{cases}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \psi(r,\theta)\, \underset{\varphi(X,Y)}{\overset{}{\mathbb{P}_{R,\theta}}}(dr d\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\varphi(x,y))\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx dy) =$$

$$= \int_0^{+\infty} dr \int_{-\pi/2}^{3/2\pi} \psi(r,\theta)\, r g(r) d\theta$$

$\Rightarrow (R,\theta)$ è A.C. con densità $h(r,\theta) = rg(r) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(r) \mathbb{1}_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)}(\theta)$

$$= 2\pi\, rg(r) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(r) \, \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)}(\theta)$$

$\Rightarrow R$ e θ sono indipendenti con

$$\mathbb{P}_R = 2\pi\, rg(r) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(r)\, dr$$

$$\mathbb{P}_\theta = U((-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3}{2}\pi))$$

Matricola - Nome e Cognome

Domanda 3) Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, a valori in $\mathbb{R}$ e con distribuzione assolutamente continua di densità f e legge F. Calcolare $\mathbb{P}(X_1 < X_2)$.

....

Svolgimento

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \iint_{\{(x_1, x_2) : x_1 < x_2\}} f(x_1) f(x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{x_1}^{+\infty} f(x_1) f(x_2)\, dx_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x_1) F(x_2) \Big|_{x_2 = x_1}^{x_2 \to +\infty} dx_1 = \int_{\mathbb{R}} f(x_1)\left(1 - F(x_1)\right) dx_1 =$$

$$= F(x_1) - \frac{1}{2} F^2(x_1) \Big|_{x_1 \to -\infty}^{x_1 \to +\infty} = \frac{1}{2}$$

Domanda 4) Si lancia un dado non truccato due volte. Calcolare la probabilità che il punteggio ottenuto nel secondo lancio sia strettamente maggiore del punteggio ottenuto nel primo lancio.

. . . .

Svolgimento $\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}(X_1 = j, X_2 > j) =$

$$= \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}(X_1 = j)\mathbb{P}(X_2 > j) = \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{6}\left(\frac{6-j}{6}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{6} - \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{6^2} j = \frac{5}{6} - \frac{1}{\cancel{6}^2} \frac{5 \cdot \cancel{6}}{2} = \frac{5}{12}$$

Matricola - Nome e Cognome