Calcolo delle Probabilità –2015-2016

Primo Compitino – 6 Novembre 2015

Matricola **Nome e Cognome**

Domanda 1) Si hanno 3 urne, indicate come urne U_i, $i = 1, 2, 3$. Ciascuna urna U_i contiene b palline bianche e r palline rosse. Si estrae una pallina da ciascuna urna.

1. Sapendo che è stata estratta una sola pallina bianca, calcolare la probabilità che dalla prima urna sia stata estratta una pallina bianca.
2. Sapendo che sono state estratte due palline bianche e una pallina rossa, calcolare la probabilità che dalla prima urna sia stata estratta una pallina bianca.

Generalizzare al seguente caso: si hanno n urne U_i, $i = 1, \ldots, n$. Ciascuna urna U_i contiene b palline bianche e r palline rosse. Si estrae una pallina da ciascuna urna. Sapendo che sono state estratte j palline bianche ($j = 0, \ldots, n$), calcolare la probabilità che dalla prima urna sia stata estratta una pallina bianca.

.... $\frac{1}{3}$ ...., ... $\frac{2}{3}$ ...., ... $\frac{j}{n}$ ....

Svolgimento Le urne sono tutte uguali, quindi faccio n prove di un esperimento di Bernoulli dove il successo (estrarre una bianca) ha probabilità $p = \frac{b}{b+r}$ ad ogni prova.

1° CASO Sia A = "estraggo bianca da U_1"

B = "estraggo una sola bianca"

devo calcolare $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(B)}$

dove C = "estraggo rossa sia da U_2 che da U_3"

$$= \frac{p\binom{2}{0}p^0(1-p)^2}{\binom{3}{1}p^1(1-p)^2} = \frac{1}{3}$$

2° CASO Sia B_2 = "estraggo due bianche e una rossa"

devo calcolare $\mathbb{P}(A|B_2) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap C_2)}{\mathbb{P}(B_2)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C_2)}{\mathbb{P}(B_2)}$

dove C_2 = "estraggo una bianca e una rossa dalle altre due urne"

$$= \frac{p\binom{2}{1}p(1-p)}{\binom{3}{2}p^2(1-p)} = \frac{2}{3}$$

CASO GENERALE

Sia A = "estraggo bianca dalla prima urna"

B_n = "estraggo j palline bianche"

Devo calcolare $\mathbb{P}(A|B_n) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B_n)}{\mathbb{P}(B_n)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap C_n)}{\mathbb{P}(B_n)} = ✪$

dove C_n = "estraggo $j-1$ palline bianche da U_2 — U_n"

$$✪ = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C_n)}{\mathbb{P}(B_n)} = \frac{p\binom{n-1}{j-1}p^{j-1}(1-p)^{(n-1)-(j-1)}}{\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}}$$

$$= \frac{\binom{n-1}{j-1}}{\binom{n}{j}} = \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} \cdot \frac{j!(n-j)!}{n!} = \frac{j}{n}$$

Domanda 2) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$.
Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X^n] = \lambda \mathbb{E}[(X+1)^{n-1}]$.
Usare tale risultato per calcolare $\mathbb{E}[X^2]$ e $\mathbb{E}[X^3]$. (Si ricorda che $\mathbb{E}[X] = \lambda$).

$\mathbb{E}[X^2] = \lambda(\lambda+1)$ $\quad$ $\mathbb{E}[X^3] = \lambda(\lambda^2+3\lambda+1)$

Svolgimento $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \quad k=0,1,2,\ldots$

$$\mathbb{E}[X^n] = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \qquad j := k-1 \Rightarrow k = j+1$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1+j)^{n-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j+1}}{j!} =$$

$$= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1+j)^{n-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1+j)^{n-1}\mathbb{P}(X=j)$$

$$= \lambda \mathbb{E}\left[(X+1)^{n-1}\right]$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \lambda \mathbb{E}[(X+1)] = \lambda(\mathbb{E}[X]+1) = \lambda(\lambda+1)$$

$$\mathbb{E}[X^3] = \lambda \mathbb{E}[(X+1)^2] = \lambda \mathbb{E}[X^2+2X+1] =$$

$$\lambda(\lambda(\lambda+1)+2\lambda+1) = \lambda(\lambda^2+3\lambda+1)$$

Domanda 3) Sia $f(x) = (x+1)^2 \mathbb{1}_{(-1,0)} + (1-x^2)\mathbb{1}_{(0,1)}$ e sia X una variabile aleatoria di distribuzione $\mathbb{P}_X = f(x)\mathrm{d}x$.
Calcolare valore atteso e varianza di X.
Calcolare la legge di X e mostrare che la mediana è maggiore del valore atteso.

$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}$, $\mathrm{Var[X]} = \frac{5}{36}$, $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<-1 \\ \frac{(t+1)^3}{3} & -1\le t<0 \\ \frac{1}{3}+t-\frac{t^3}{3} & 0\le t<1 \\ 1 & t\geq 1 \end{cases}$

Svolgimento

$\mathbb{E}[X]$ è sicuramente ben definito perché f è continua a tratti, limitata e a supporto compatto.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx = \int_{-1}^{0} x(x+1)^2 dx + \int_0^1 x(1-x^2)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}(x^3+2x^2+x)dx + \int_0^1 (x-x^3)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=-1}^{x=0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \cancel{-\frac{1}{4}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2(x+1)^2 dx + \int_0^1 x^2(1-x^2)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}(x^4+2x^3+x^2)dx + \int_0^1 (x^2-x^4)dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}x^4 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-1}^{x=0} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \cancel{\frac{1}{5}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$$

$F_X(t) = 0 \quad t\leq -1, \quad F_X(t) = 1 \quad t\geq 1$

$t\in[-1,0) \quad F_X(t) = \int_{-1}^{t}(x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3}\Big|_{x=-1}^{x=t} = \frac{(t+1)^3}{3}$

$t\in[0,1) \quad F_X(t) = F_X(0) + \int_0^t (1-x^2)dx = \frac{1}{3} + \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=t} = \frac{1}{3} + t - \frac{t^3}{3}$

$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}, \quad F_X\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 < \frac{1}{2} \Rightarrow t_M > \frac{1}{6}$

Domanda 4) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro λ. Per $k \in \mathbb{N}$ calcolare il valore atteso di X^k.

$\mathbb{E}[X^k] = \ldots \frac{k!}{\lambda^k} \ldots$

Svolgimento

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,dx \qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

$$= \int_0^{+\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x}\,dx \qquad y = \lambda x \quad x = \frac{y}{\lambda} \quad dx = \frac{1}{\lambda}dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{y^k}{\lambda^k} \cancel{\lambda} e^{-y} \frac{1}{\cancel{\lambda}} dy = \frac{1}{\lambda^k}\int_0^{+\infty} y^{(k+1)-1} e^{-y}\,dy =$$

$$= \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k} = \frac{k!}{\lambda^k}$$