Calcolo delle Probabilità –2015-2016

Quinto Appello – 8 Settembre 2016

Matricola **Nome e Cognome**

Domanda 1) In via Utopia il cassonetto dell'indifferenziato viene svuotato ogni due ore. Alle 8:00, alle 10:00 e così via. A causa del traffico però, per ciascuna operazione di svuotamento, la probabilità che questa venga effettuata in orario è di $\frac{1}{2}$, la probabilità che avvenga con 10 minuti di ritardo è $\frac{1}{3}$ e la probabilità che venga effettuata con 20 minuti di ritardo è $\frac{1}{6}$.

La probabilità che dopo s minuti dall'ultimo svuotamento non vi sia nessun rifiuto nel cassonetto è $(s+1)^{-2}$.
Calcolare la probabilità che alle 8:20 il cassonetto sia vuoto.
Sapendo che alle 8:20 il cassonetto è vuoto, calcolare la probabilità che lo svuotamento programmato per le 8:00 sia avvenuto con 20 minuti di ritardo.

....

Svolgimento

$X_s = 1$ se dopo s minuti c'è rifiuto $\qquad \mathbb{P}(X_s = 1) = 1-(s+1)^{-2}$

$X_s = 0$ se dopo s minuti non ci sono rifiuti $\qquad \mathbb{P}(X_s = 0) = (s+1)^{-2}$

$\mathbb{P}(X_{20} = 0) = ?$

$\mathbb{P}(R=0) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(R=10) = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}(R=20) = \frac{1}{6}$

$$\mathbb{P}(X_{20}=0) = \mathbb{P}(X_{20}=0 \mid R=0)\mathbb{P}(R=0) + \mathbb{P}(X_{20}=0 \mid R=10)\mathbb{P}(R=10) + \mathbb{P}(X_{20}=0 \mid R=20)\mathbb{P}(R=20)$$

$$= (21)^{-2}\frac{1}{2} + (11)^{-2}\frac{1}{3} + 1^{-2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(3(21)^{-2} + 2(11)^{-2} + 1\right)$$

$$\mathbb{P}(R=20 \mid X_{20}=0) = \frac{\mathbb{P}(X_{20}=0 \mid R=20)\mathbb{P}(R=20)}{\mathbb{P}(X_{20}=0)} =$$

$$= \frac{1\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\left(1+2\cdot(11)^{-2}+3(21)^{-2}\right)}$$

Domanda 2) Un giocatore lancia una moneta equa n volte, $n \geq 4$. Al primo lancio non guadagna niente. Per ogni lancio successivo

1. guadagna 1 Euro se l'esito del lancio è diverso dall'esito del lancio precedente;
2. perde 50 centesimi se l'esito del lancio è uguale all'esito del lancio dell'esito precedente.

Calcolare la probabilità che effettui almeno tre lanci vincenti.
Indicata con la v.a. X_k la vincita (o perdita) in Euro, dovuta al k-esimo lancio, determinare la distribuzione di X_k.
Calcolare il valore atteso del guadagno totale.

Svolgimento

$X = \#$ ~~lanci~~ lanci vincenti $\quad X \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \left(\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)\right)$$

$$\{X=0\} = \{(T \ldots T), (C \ldots C)\} \qquad \mathbb{P}(X=0) = \frac{2}{2^n}$$

$$\{X=1\} = \{(\underbrace{T \ldots T}_{k}\underbrace{C \ldots C}_{n-k}), (\underbrace{C \ldots C}_{k}, \underbrace{T \ldots T}_{n-k}), k=1, \ldots, n-1\}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = 2 \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{2(n-1)}{2^n}$$

$$\{X=2\} = \{(\underbrace{T-T}_{k_1}\ \underbrace{C-C}_{k_2}\ \underbrace{T-T}_{n-(k_1+k_2)})(\underbrace{C-C}_{k_1}, \underbrace{T-T}_{k_2}, \underbrace{C-C}_{n-(k_1+k_2)})$$

$$k_1 = 1, \ldots n-2, \quad k_2 = 1, \ldots, (n-1)-k_1\}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = 2 \cdot \sum_{k_1=1}^{n-2} \sum_{k_2=1}^{n-1-k_1} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} \sum_{k_1=1}^{n-2} (n-1)-k_1 =$$

$$= \frac{2}{2^n}\left((n-1)(n-2) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{2^n}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - 2^{-n}\left(\cancel{2} + 2(n-\cancel{1}) + (n-1)(n-2)\right) = 1 - 2^{-n}\left(2n + (n-1)(n-2)\right)$$

$$\{X_k = 1\} \quad \underbrace{\quad}_{k-2}\ TC\ \underbrace{\quad}_{n-k} \qquad \underbrace{\quad}_{k-2}\ CT\ \underbrace{\quad}_{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}\left(X_k = -\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$X = \sum_{k=2}^{n} X_k \qquad \mathbb{E}[X_k] = \frac{n-1}{4}$$

Matricola - Nome e Cognome

Domanda 3) X e Y sono v.a. i.i.d. aventi distribuzione di Bernoulli di parametro $p \in [0,1]$ e sia $Z := \mathbb{1}_{\{X+Y=0\}}$. Calcolare $\Phi := \mathbb{E}[X|Z]$ e $\Psi := \mathbb{E}[Y|Z]$. Esistono valori di p per cui Φ e Ψ sono v.a. indipendenti?

....

Svolgimento $\mathcal{G} = \sigma(Z) = \{\phi, \Omega, \underbrace{\{Z=0\}}_{B_0}, \underbrace{\{Z=1\}}_{B_1}\}$

$$\Phi(\omega) \mathbb{E}[X|Z](\omega) = \mathbb{E}_{B_0}[X]\mathbb{1}_{B_0}(\omega) + \mathbb{E}_{B_1}[X]\mathbb{1}_{B_1}(\omega)$$

$$\mathbb{E}_{B_i}[X] = \frac{1}{\mathbb{P}(B_i)}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{B_i}]$$

$$B_0 = \{Z=0\} = \{X=1\} \cup \{X=0, Y=1\}$$

$$\mathbb{P}(B_0) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) = p + (1-p)p = p(2-p)$$

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{B_0}] = \int_\Omega (X\mathbb{1}_{B_0})(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{X=1} 1\,\mathbb{P}(d\omega) + 0 = \mathbb{P}(X=1) = p$$

$$B_1 = \{Z=1\} = \{X=0, Y=0\}$$

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) = (1-p)^2$$

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{B_1}] = \int_\Omega (X\mathbb{1}_{B_1})(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = 0$$

$$\Phi(\omega) = \frac{p}{p(2-p)}\mathbb{1}_{\{Z=0\}}(\omega) + 0\cdot\mathbb{1}_{\{Z=1\}}(\omega) = \frac{1}{2-p}\mathbb{1}_{\{Z=0\}}(\omega)$$

chiaramente $\Psi(\omega) = \Phi(\omega)$

Sono indipendenti?

$$\mathbb{P}(\Phi=0, \Psi=0) = \mathbb{P}(Z=1) = (1-p)^2 \quad \Rightarrow \quad p=0 \vee p=1$$

$$\mathbb{P}(\Phi=0)\mathbb{P}(\Psi=0) = (\mathbb{P}(Z=1))^2 = (1-p)^4$$

Matricola - Nome e Cognome

Domanda 4) X ed Y sono v.a. indipendenti. X ha distribuzione esponenziale di parametro λ mentre Y ha distribuzione esponenziale di parametro μ.
Calcolare la distribuzione della v.a. $Z := \dfrac{X}{Y}$. Calcolare, se esiste, il valore atteso di Z.

....

Svolgimento

$$Z = \varphi \circ (X,Y) \qquad \varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{x}{y} \in \mathbb{R}$$

ψ funzione Test

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\, \mathbb{P}_Z(dt) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi\left(\frac{x}{y}\right) \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) =$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \psi\left(\frac{x}{y}\right) \lambda\mu\, e^{-\lambda x - \mu y}\, dx \qquad x = ty \quad dx = y\,dt$$

$$x = 0 \iff t = 0$$

$$x \to +\infty \iff t \to +\infty$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \psi(t)\, \lambda\mu\, y \exp\left(-y(\lambda t + \mu)\right) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \psi(t) \left(\lambda\mu \int_0^{+\infty} y \exp\left(-y(\lambda t+\mu)\right) dy \right) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \psi(t) \lambda\mu \left(\frac{y}{-(\lambda t+\mu)} \exp\left(-y(\lambda t+\mu)\right) \Big|_{y=0}^{y\to+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda t+\mu} \exp\left(-y(\lambda t+\mu)\right) dy \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \psi(t) \frac{\lambda\mu}{(\lambda t+\mu)^2}\, dt$$

$$\mathbb{P}_Z = g(t)\,dt \qquad g(t) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda t+\mu)^2} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)$$

$Z \geq 0$ $\mathbb{P}$-q.c. $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Z^+]$ esiste

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Z^+] = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda\mu t}{(\lambda t+\mu)^2}\, dt = +\infty$$