Calcolo delle Probabilità –2015-2016

Quarto Appello – 12 Luglio 2016

Matricola **Nome e Cognome**

Domanda 1) Abbiamo 10 monete in un'urna. Di esse, 5 sono eque, 3 hanno croce su entrambe le facce e 2 hanno testa su entrambe le facce.
Si estrae una moneta dall'urna (senza guardare) e la si lancia. Qual è la probabilità di ottenere testa?
Sapendo di aver ottenuto testa, qual è la probabilità che ci sia testa anche sull'altra faccia?

....

Svolgimento

$\mathbb{P}(E) = \frac{5}{10} \qquad \mathbb{P}(CC) = \frac{3}{10} \qquad \mathbb{P}(TT) = \frac{2}{10}$

$\mathbb{P}(T|E) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(T|CC) = 0 \qquad \mathbb{P}(T|TT) = 1$

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(T|CC)\mathbb{P}(CC) + \mathbb{P}(T|TT)\mathbb{P}(TT)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} + 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$$

$$\mathbb{P}(TT|T) = \frac{\mathbb{P}(T|TT)\mathbb{P}(TT)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{1 \cdot \frac{2}{10}}{9/20} = \frac{2}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{20}^{2}}{9} = \frac{4}{9}$$

Matricola - **Nome e Cognome**

Domanda 2) Un giocatore lancia ripetutamente un *dado equo a 4 facce.* Il gioco termina appena il giocatore ottiene il primo "1". Il giocatore puó anche scegliere di fermarsi prima. Il giocatore attua la strategia: "mi fermo appena ottengo *almeno k*", (per un qualche $k = 2, 3, 4$).
Calcolare, in dipendenza di k, il *valore atteso dell'ultimo lancio.*

....

Svolgimento $S :=$ risultato dell'ultimo lancio

1) Mi fermo appena ottengo almeno 2

$\Rightarrow$ Comunque faccio 1 solo lancio

$\mathbb{P}(S=1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(S=2) = \mathbb{P}(S=3) = \mathbb{P}(S=4)$

$\mathbb{E}[S] = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{1}{4}\,\frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2}$

2) Mi fermo appena ottengo almeno 3

$\{S=1\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X_j = 1\ X_1 = \text{—} = X_{j-1} = 2\}$

$\{S=2\} = \emptyset$

$\{S=3\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X_j = 3, X_1 = \text{—} = X_{j-1} = 2\}$

$\{S=4\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X_j = 4, X_1 = \text{—} = X_{j-1} = 2\}$

Per simmetria $\mathbb{P}(S=1) = \mathbb{P}(S=3) = \mathbb{P}(S=4) \Rightarrow = \frac{1}{3}$

<u>oppure</u>

$\mathbb{P}(S=1) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(S=3) = \mathbb{P}(S=4)$

$\mathbb{E}[S] = \frac{1}{3}(1+3+4) = 8/3$

3) Mi fermo appena ottengo almeno 4

$\{S=1\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X_j = 1, X_1 \in \{2,3\}, \text{—}, X_{j-1} \in \{2,3\}\}$

$\{S=4\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{X_j = 4, X_1 \in \{2,3\}, \text{—}\ X_{j-1} \in \{2,3\}\}$

$\mathbb{P}(S=1) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(S=4)$ (oppure per simmetria)

$\Rightarrow \mathbb{E}[S] = \frac{1}{2}(1+4) = \frac{5}{2}$

Matricola - **Nome e Cognome**

Domanda 3) Sia X una v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, con legge F_X e distribuzione $\mathbb{P}_X$. Siano $C > 0$, $m < M$ costanti e siano Y e Z le v.a. definite da

$$Y := \begin{cases} m & \text{se } X < m, \\ X & \text{se } m \leq X \leq M, \\ M & \text{se } X > M. \end{cases} \qquad Z := \begin{cases} 0 & \text{se } |X| > C, \\ X & \text{se } |X| \leq C. \end{cases}$$

Calcolare le leggi F_Y e F_Z in funzione di F_X

Calcolare le distribuzioni $\mathbb{P}_Y$ e $\mathbb{P}_Z$ in funzione di $\mathbb{P}_X$ ed (eventualmente) di altre distribuzioni note.

....

Svolgimento

$t < m \quad \mathbb{P}(Y \leq t) = 0$

$t \in [m, M) \quad \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X < m) + \mathbb{P}(m \leq X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t)$

$t \geq M \quad \mathbb{P}(Y \leq t) = 1$

— o —

$t < -C \quad \mathbb{P}(Z \leq t) = 0$

$-C \leq t < 0 \quad \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t, |X| \leq C) = \mathbb{P}(-C \leq X \leq t) =$

$= F_X(t) - F(-C^-)$

$0 \leq t < C \quad \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(|X| > C) + \mathbb{P}(X \leq t, |X| \leq C) =$

$= \mathbb{P}(X > C) + \mathbb{P}(X < -C) + \mathbb{P}(-C \leq X \leq t) =$

$= 1 - F_X(C) + \cancel{F_X(-C^-)} + F_X(t) \cancel{- F_X(-C^-)}$

$t \geq C \quad \mathbb{P}(Z \leq t) = 1$

— o —

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) \mathbb{P}_Y(dt) = \int_{\mathbb{R}} \psi(\varphi(s)) \mathbb{P}_X(ds) \qquad \varphi(s) = \begin{cases} m & s < m \\ s & m \leq s \leq M \\ M & s > M \end{cases}$$

$$= \int_{(-\infty, m)} \psi(m) \mathbb{P}_X(ds) + \int_{[m,M]} \psi(s) \mathbb{P}_X(ds) + \int_{(M, +\infty)} \psi(M) \mathbb{P}_X(ds) =$$

$$= \psi(m) \mathbb{P}(X < m) + \int_{[m,M]} \psi(s) \mathbb{P}_X(ds) + \psi(M) \mathbb{P}(X > M) \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}_Y = F_X(m^-) \delta_m + (1 - F_X(M)) \delta_M + 1_{[m,M]}(s) \mathbb{P}_X(ds)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) \mathbb{P}_Z(dt) = \int_{\mathbb{R}} \psi(\varphi(s)) \mathbb{P}_X(ds) \qquad \varphi(s) = \begin{cases} 0 & |s| > C \\ s & |s| \leq C \end{cases}$$

Matricola - Nome e Cognome

Domanda 4) Sulla semicirconferenze $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ si scelgono, in maniera indipendente, due angoli al centro a caso, Θ_1 e Θ_2. Calcolare la distribuzione della v.a. $\Psi := \frac{|\Theta_2 - \Theta_1|}{2}$.
Calcolare il valore atteso della lunghezza della corda sottesa $L = 2 \sin \Psi$.

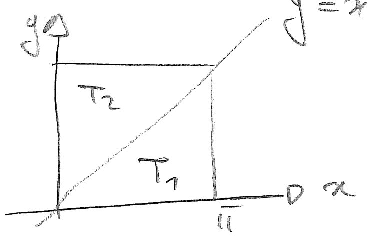
....

Svolgimento

$$\mathbb{P}_{\Theta_1} = \mathbb{P}_{\Theta_2} = U([0,\pi]) \qquad \Psi = \varphi \circ (\Theta_1, \Theta_2) \qquad \varphi(x,y) = \frac{|y-x|}{2}$$

γ funzione di Borel nonnegativa

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(t)\, \mathbb{P}_{\Psi}(dt) = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma(\varphi(x,y))\, \mathbb{P}_{\Theta_1,\Theta_2}(dxdy) =$$



$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{[0,\pi]^2} \gamma\left(\left|\frac{y-x}{2}\right|\right) dxdy =$$

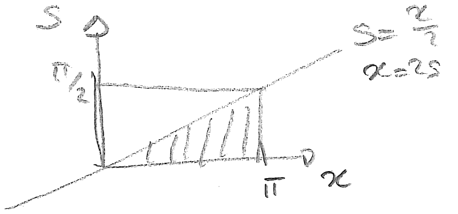
$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{T_1} \gamma\left(\frac{x-y}{2}\right) dxdy + \frac{1}{\pi^2} \int_{T_2} \gamma\left(\frac{y-x}{2}\right) dxdy =$$

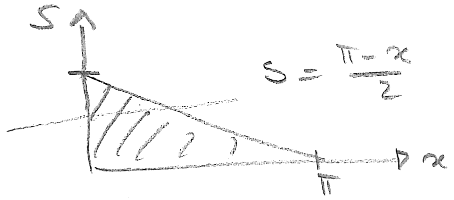
$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} dx \int_0^{x} \gamma\left(\frac{x-y}{2}\right) dy + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} dx \int_x^{\pi} \gamma\left(\frac{y-x}{2}\right) dy =$$

$$s = \frac{x-y}{2} \qquad\qquad s = \frac{y-x}{2}$$

$$y = x - 2s \qquad\qquad y = x + 2s$$

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} dx \int_0^{x/2} 2\gamma(s)\, ds + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} dx \int_0^{\frac{\pi - x}{2}} 2\gamma(s)\, ds$$





$$\frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \gamma(s) \int_{2s}^{\pi} dx\, ds + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \gamma(s) \int_0^{\pi - 2s} dx\, ds$$

Matricola - **Nome e Cognome**

foglio 5

$$= \int_{(-\infty,-c)\cup(c,+\infty)} \varphi(0)\,\mathbb{P}_X(ds) + \int_{[-c,c]} \varphi(s)\,\mathbb{P}_X(ds)$$

$$\Rightarrow \varphi(0)\Big(\mathbb{P}(X<-c)+\mathbb{P}(X>c)\Big) + \int_{[-c,c]} \varphi(s)\,\mathbb{P}_X(ds)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_Z = \Big(F_X(-c^-) + 1 - F_X(c)\Big)\delta_0 + \mathbb{1}_{[-c,c]}(s)\,\mathbb{P}_X(ds)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \gamma(s)\,\frac{2(\pi-2s)}{\pi^2}\,ds + \int_0^{\pi/2} \gamma(s)\,\frac{2(\pi-2s)}{\pi^2}\,ds$$

$$= \int_0^{\pi/2} \gamma(s)\,\frac{4(\pi-2s)}{\pi^2}\,ds \Rightarrow \quad \mathbb{P}_\Phi = g(s)\,ds$$

$$\text{con} \quad g(s) = \frac{4(\pi-2s)}{\pi^2}\,\mathbb{1}_{(0,\frac{\pi}{2})}(s)\,ds$$

$$\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[2\sin\Phi] = \int_{\mathbb{R}} 2\sin(t)\,\mathbb{P}_\Phi(dt) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \underbrace{(\pi-2t)}_{f}\,\underbrace{\sin(t)}_{g'}\,dt = \frac{8}{\pi^2}\left((\pi-2t)(-\cos(t))\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\cos(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\left(\pi - 2\sin(t)\Big|_{t=0}^{t=\pi/2}\right) = \frac{8(\pi-1)}{\pi^2}$$