Calcolo delle Probabilità –2015-2016

Terzo Appello – 28 Giugno 2016

Matricola **Nome e Cognome**

Domanda 1) Si hanno tre urne:

1. la prima urna contiene 6 palline bianche e 4 palline rosse;
2. la seconda urna contiene 4 palline bianche e 6 palline rosse;
3. la terza urna contiene 2 palline bianche e 8 palline rosse.

Si lanciano due monete.

1. Se escono due croci si estragogno (senza reimbussolamento) due palline dalla prima urna;
2. se escono una testa ed una croce si estraggono (senza reimbussolamento) due palline dalla seconda urna;
3. se escono due teste si estraggono (senza reimbussolamento) due palline dalla terza urna.

Calcolare la probabilità di estrarre due palline rosse.
Sapendo che sono state estratte due palline rosse, calcolare la probabilità di aver ottenuto due croci nel lancio delle monete.

....

Svolgimento $\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_3) = \frac{1}{4}$ $\mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(R|U_1) = \frac{\binom{6}{0}\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{\binom{10}{2}} \qquad \mathbb{P}(R|U_2) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6\cdot 5}{2}\frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{\binom{10}{2}}$$

$$\mathbb{P}(R|U_3) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{8\cdot 7}{2}\frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{28}{\binom{10}{2}} = =$$

$$\mathbb{P}(R) = \frac{1}{\binom{10}{2}}\left(\frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot \overset{3}{\cancel{6}} + \frac{1}{2}\cdot 15 + \frac{1}{4}28\right) = \frac{1}{\binom{10}{2}}\left(\frac{3}{2} + \frac{15}{2} + 7\right) = \frac{16}{\binom{10}{2}} = \frac{16}{45}$$

$$\mathbb{P}(U_1|R) = \frac{\mathbb{P}(R|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\cancel{\binom{10}{2}}}\frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{\cancel{\binom{10}{2}}}{16} = \frac{3}{32}$$

Domanda 2) Sia $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e Lebesgue-misurabile. Siano

$$I := \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x, \qquad M \in \mathbb{R}\colon\ |g(x)| \le M \quad \forall x \in [0,1].$$

Sia $\{X_k\}_{k\ge1}$ una successione di v.a. i.i.d. con $\mathbb{P}_{X_k} = U[0,1]$. Per ogni $n \ge 1$ sia

$$I_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g \circ X_k.$$

Calcolare $\mathbb{E}[I_n]$ e Var[I$_n$] in termini di g.
Applicando la disuguaglianza di Chebychev, dire quanto deve essere grande n (in funzione di M e ε) affinché $\mathbb{P}\left(|I_n - I| > \varepsilon\right) < 0.05$.

Svolgimento $\mathbb{E}[I_n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[g\circ X_k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I = I = \int_0^1 g(x)dx$

$$\mathbb{E}[g\circ X_k] = \int_\Omega g\circ X_k(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathbb{P}_{X_k}(dx) = \int_0^1 g(x)dx$$

$$\mathrm{Var}[I_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}[g\circ X_k]$$

$$\mathbb{E}[g^2\circ X_k] = \int_\Omega g^2\circ X_k(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g^2(x)\mathbb{P}_{X_k}(dx) = \int_0^1 g^2(x)dx$$

$$\mathrm{Var}[g\circ X_k] = \int_0^1 g^2(x)dx - \left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2$$

$$\mathrm{Var}[I_n] = \frac{1}{n}\left(\int_0^1 g^2(x)dx - \left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2\right)$$

$$\mathbb{P}(|I_n - I| > \varepsilon) \le \frac{\mathrm{Var}[I_n]}{\varepsilon^2} \le \frac{M^2}{n\varepsilon^2} < \frac{5}{100}$$

$$\boxed{n > \frac{1}{20}\frac{\varepsilon^2}{M^2}}$$

Matricola - **Nome e Cognome**

Domanda 3) Sia X v.a. a valori in $\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \ldots$ tale che $p_n := \mathbb{P}(X = n) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. X è una v.a. di Poisson;
2. $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = \dfrac{\lambda}{n} \quad \forall n \geq 1.$

Svolgimento

1) $\mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!} = p_n$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \cancel{e^{-\lambda}} \frac{\lambda^n}{n!} \cancel{e^{\lambda}} \frac{(n-1)!}{\lambda^{n-1}} = \frac{\lambda}{n} \quad \checkmark$$

2) Viceversa $\quad p_1 = \lambda p_0$

$$p_2 = \frac{\lambda}{2} p_1 = \frac{\lambda^2}{2} p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{3} p_2 = \frac{\lambda^3}{6} p_0$$

Per induzione $\quad p_n = \dfrac{\lambda^n}{n!} p_0$

$$p_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} p_n = \frac{\lambda}{n+1} \frac{\lambda^n}{n!} p_0 = \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} p_0 \quad \text{ok}$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} p_0 = p_0 e^{\lambda} \quad \Rightarrow \quad p_0 = e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_X = \text{Poiss}(\lambda)$$

Domanda 4) Sulla semiretta $[0,+\infty)$ si scelgono, in maniera indipendente, due punti X e Y. Sapendo che il punto X è una v.a. di distribuzione esponenziale di parametro λ mentre Y è una v.a. esponenziale di parametro μ, calcolare valore atteso e varianza dell'Area del rettangolo di base X e altezza Y.
Determinare la distribuzione della v.a. $Z := XY$.

....

Svolgimento

$\mathbb{P}_X = \exp(\lambda) \qquad \mathbb{P}_Y = \exp(\mu)$ indipendenti

$Z = XY$

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\lambda\mu}$

$\mathbb{E}[X^2Y^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] = \frac{2}{\lambda^2}\cdot\frac{2}{\mu^2}$

$\Rightarrow \mathrm{Var}[XY] = \frac{3}{\lambda^2\mu^2}$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione Test $\qquad \varphi(x,y) = xy$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(z)\,\mathbb{P}_Z(dz) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(xy)\,\underbrace{\mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy)}_{=\mathbb{P}_X(dx)\mathbb{P}_Y(dy)} =$$

$$= \int_{[0,+\infty)^2} \psi(xy)\,\lambda\mu\, e^{-\lambda x} e^{-\mu y}\, dy$$

Nell'integrale in y pongo $t = xy \qquad y = \frac{t}{x} \quad dy = \frac{dt}{x}$

$y = 0 \quad t = 0$

$y \to +\infty \quad t \to +\infty$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda\mu\, e^{-\lambda x}\left(\int_0^{+\infty} \psi(t)\, e^{-\mu\frac{t}{x}}\,\frac{1}{x}\,dt\right)dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \psi(t)\left(\int_0^{+\infty} \lambda\mu\,\frac{e^{-\lambda x-\mu\frac{t}{x}}}{x}\,dx\right)dt$$

$$\mathbb{P}_Z = g(t)\,dt \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \int_0^{+\infty} \frac{\lambda\mu}{x}\, e^{-\lambda x-\mu\frac{t}{x}}\,dx & t > 0 \end{cases}$$