

# Calcolo delle Probabilità –2015-2016

## Terzo Appello – 28 Giugno 2016

---

**Matricola**

**Nome e Cognome**

---

**Domanda 1)** Si hanno tre urne:

1. la prima urna contiene 6 palline bianche e 4 palline rosse;
2. la seconda urna contiene 4 palline bianche e 6 palline rosse;
3. la terza urna contiene 2 palline bianche e 8 palline rosse.

Si lanciano due monete.

1. Se escono due croci si estraggono (senza reimbussolamento) due palline dalla prima urna;
2. se escono una testa ed una croce si estraggono (senza reimbussolamento) due palline dalla seconda urna;
3. se escono due teste si estraggono (senza reimbussolamento) due palline dalla terza urna.

Calcolare la probabilità di estrarre due palline rosse.

Sapendo che sono state estratte due palline rosse, calcolare la probabilità di aver ottenuto due croci nel lancio delle monete.

.....

**Svolgimento**

**Domanda 2)** Sia  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata e Lebesgue-misurabile. Siano

$$I := \int_0^1 g(x)dx, \quad M \in \mathbb{R}: |g(x)| \leq M \quad \forall x \in [0, 1].$$

Sia  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  una successione di v.a. i.i.d. con  $\mathbb{P}_{X_k} = U[0, 1]$ . Per ogni  $n \geq 1$  sia

$$I_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g \circ X_k.$$

Calcolare  $\mathbb{E}[I_n]$  e  $\text{Var}[I_n]$  in termini di  $g$ .

Applicando la disuguaglianza di Chebychev, dire quanto deve essere grande  $n$  (in funzione di  $M$  e  $\varepsilon$ ) affinché  $\mathbb{P}(|I_n - I| > \varepsilon) < 0.05$ .

.....

**Svolgimento**

**Domanda 3)** Sia  $X$  v.a. a valori in  $\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \dots$  tale che  $p_n := \mathbb{P}(X = n) > 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}_0$ . Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $X$  è una v.a. di Poisson;
  2.  $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n} \quad \forall n \geq 1$ .
- .....

**Svolgimento**

**Domanda 4)** Sulla semiretta  $[0, +\infty)$  si scelgono, in maniera indipendente, due punti  $X$  e  $Y$ . Sapendo che il punto  $X$  è una v.a. di distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda$  mentre  $Y$  è una v.a. esponenziale di parametro  $\mu$ , calcolare valore atteso e varianza dell'Area del rettangolo di base  $X$  e altezza  $Y$ .  
Determinare la distribuzione della v.a.  $Z := XY$ .

.....

**Svolgimento**