Calcolo delle Probabilità –2015-2016

Secondo Appello – 9 Febbraio 2016

Matricola **Nome e Cognome**

Domanda 1) Un'urna contiene N monete distinte, numerate da 1 a N. La probabilità che, lanciando la moneta i-esima si ottenga testa è $\frac{i}{N}$. Si estrae una moneta a caso e la si lancia 2 volte. Sapendo che al primo lancio si è ottenuto testa, quanto vale la probabilità (condizionata) di ottenere testa anche al secondo lancio?

$\frac{2N+1}{3N}$

Svolgimento

A_i = "estraggo la moneta i-esima" $\quad P(A_i) = \frac{1}{N} \quad \forall i = 1 - N$

T_1 = "ottengo testa al 1° lancio"

T_2 = "ottengo testa al 2° lancio" $\quad \mathbb{P}(T_2|A_i) = \mathbb{P}(T_1|A_i) = \frac{i}{N} \quad \forall i = 1 - N$

Devo calcolare $\mathbb{P}(T_2|T_1)$

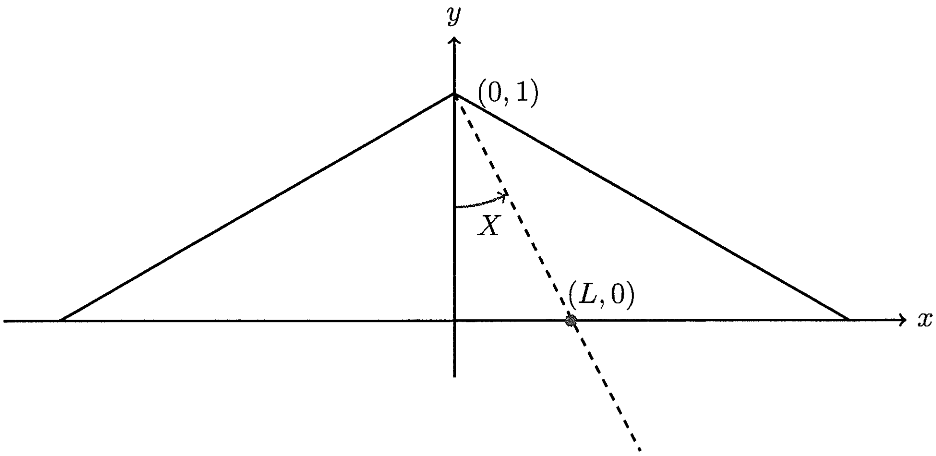
$$\mathbb{P}(T_2|T_1) = \frac{\mathbb{P}(T_2 \cap T_1)}{\mathbb{P}(T_1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(T_2 \cap T_1 | A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(T_1|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Ma $\mathbb{P}(T_2 \cap T_1 | A_i) = B(2, \frac{i}{N})(\{2\}) = \left(\frac{i}{N}\right)^2 \Rightarrow$

$$\mathbb{P}(T_2|T_1) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{i}{N}\right)^2 \frac{1}{N}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N}\frac{1}{N}} = \frac{\frac{1}{N^3}\sum_{i=1}^{N} i^2}{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} i} = \frac{1}{N} \frac{\cancel{N}\cancel{(N+1)}(2N+1)}{\cancel{6}_{3}} \frac{\cancel{2}}{\cancel{N}\cancel{(N+1)}}$$

$$= \frac{2N+1}{3N}$$

Domanda 2) sul piano cartesiano Oxy si consideri il triangolo isoscele di vertice $(0,1)$, con base sull'asse delle ascisse e con angolo al vertice di ampiezza 2Θ. A partire dal vertice $(0,1)$, scegliendo <u>a caso</u> una direzione $X \in (-\Theta, \Theta)$ contenuta nell'angolo al vertice, si traccia una semiretta che interseca la base del triangolo in un punto L. Determinare la distribuzione della v.a. L. Che distribuzione si ottiene quando $\Theta \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}$?



Svolgimento

$L = tg(X) \qquad L = f \circ X \qquad f : x \in (-\theta, \theta) \longmapsto Tg(x) \in \mathbb{R}$

$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Borel nonnegativa , $\mathbb{P}_X = U((-\theta,\theta))$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\, \mathbb{P}_L(dt) = \int_{\mathbb{R}} \psi(f(x))\, \mathbb{P}_X(dx) = \int_{-\theta}^{\theta} \psi(tg(x)) \frac{1}{2\theta} dx$$

$t = Tg(x) \qquad x = atan(t) \qquad dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\int_{-tg\theta}^{tg\theta} \psi(t) \frac{1}{2\theta} \frac{1}{1+t^2} dt \Rightarrow \mathbb{P}_L = f(t)dt \text{ dove}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\theta(1+t^2)} \mathbb{1}_{(-tg\theta, tg\theta)}(t)$$

$$\theta \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-} \Rightarrow f(t) \to \frac{1}{\pi(1+t^2)} \quad t \in \mathbb{R}$$

densità associata alla distribuzione di Cauchy

Matricola - Nome e Cognome

Domanda 3) Le v.a. X e Y sono i.i.d. e seguono la distribuzione gaussiana standard. Calcolare distribuzione, valore atteso e varianza della v.a. $D_2 := \sqrt{X^2+Y^2}$.

....

Svolgimento

$D_2 = \varphi \circ (X,Y) \qquad \varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$

$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Borel nonnegativa

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\, \mathbb{P}_{D_2}(dt) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\varphi(x,y))\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\sqrt{x^2+y^2})\, \mathbb{P}_X(dx)\, \mathbb{P}_Y(dy) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\sqrt{x^2+y^2}) \exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right) dx\,dy$$

$x = r\cos\theta \qquad r>0$

$y = r\sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(\psi(r)\, r \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \int_0^{2\pi} d\theta \right) dr = \int_0^{+\infty} \psi(r)\, r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{D_2} = g(r)\,dr \text{ con } g(r) = r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(r)$$

$$\mathbb{E}[D_2] = \int_0^{+\infty} r^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr = \int_0^{+\infty} (-r) \frac{d}{dr} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr =$$

$$= r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathbb{E}[D_2^2] = \int_0^{+\infty} r^3 \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr = \int_0^{+\infty} (-r^2) \frac{d}{dr} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr =$$

$$= -r^2\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr = -2\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{+\infty} = 2$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}[D_2] = 2 - \frac{\pi}{2}$$

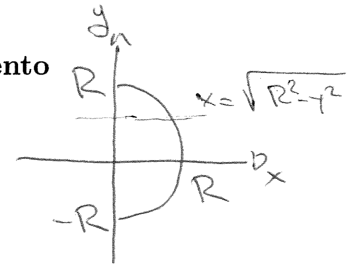
Domanda 4) La v.a. bidimensionale (X,Y) è uniformemente distribuita sul semidisco centrato nell'origine, di raggio R e contenuto nel primo e quarto quadrante:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{2}{\pi R^2}\,\mathbb{1}_S(x,y), \qquad S := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2\le R^2,\ x\ge 0\right\}.$$

Calcolare $f_{X|Y}(x|y)$ e $\mathbb{E}[X|Y=y]$.

. . . .

Svolgimento



$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 0 & |y|\ge R \\ \quad \text{↳ o qualsiasi cosa} & \\ \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} & |y|<R \end{cases}$$

$$y\in(-R,R) \qquad f_Y(y) = \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{2}{\pi R^2}\,dx = \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2} \implies$$

$$\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi R^2}}\,\mathbb{1}_S(x,y)\,\frac{\cancel{\pi R^2}}{\cancel{2}\sqrt{R^2-y^2}} = \frac{\mathbb{1}_S(x,y)}{\sqrt{R^2-y^2}} \qquad |y|<R$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{R^2-y^2}} & (x,y)\in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \begin{cases} 0 & |y|\ge R \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathbb{1}_{(0,\sqrt{R^2-y^2})}(x)\,dx \quad (*) & |y|<R \end{cases}$$

$$(*) = \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=\sqrt{R^2-y^2}} = \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{2}$$

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \begin{cases} 0 & |y|\ge R \\ \dfrac{\sqrt{R^2-y^2}}{2} & |y|<R \end{cases}$$

Matricola - **Nome e Cognome**