Calcolo delle Probabilità –2015-2016

Primo Appello – 14 Gennaio 2016

Matricola **Nome e Cognome**

Domanda 1) Un'urna contiene N palline, numerate da 1 a N. Si estraggono k palline. Sia Y il massimo valore estratto. Determinare la densità della v.a. Y nei due seguenti casi:

1. sono state effettuate k estrazioni successive con reimbussolamento;
2. sono state effettuate k estrazioni successive senza reimbussolamento.

. . . .

Svolgimento

1^o CASO Y prende valori in $\{1, \dots, N\}$

$$F_Y(j) = \mathbb{P}(Y \leq j) = \mathbb{P}(X_1 \leq j, \dots, X_k \leq j) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i \leq j) = \prod_{i=1}^{k} \frac{j}{N} = \left(\frac{j}{N}\right)^k$$

$$\mathbb{P}(Y = j) = F_Y(j) - F_Y(j-1) = \frac{j^k - (j-1)^k}{N^k} \qquad j = 1, \dots, N$$

2^o CASO Y prende valori in $\{k, \dots, N\}$

$$F_Y(j) = \mathbb{P}(Y \leq j) = \mathbb{P}(X_1 \leq j, \dots, X_k \leq j) = \frac{\binom{j}{k}\binom{N-j}{0}}{\binom{N}{k}} = \frac{\binom{j}{k}}{\binom{N}{k}}$$

$$\mathbb{P}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\binom{j}{k}}{\binom{N}{k}} & j = k \\[2ex] \dfrac{\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}}{\binom{N}{k}} & j = k+1, \dots, N \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{N}{k}} & j = k \\[2ex] \dfrac{\binom{j-1}{k-1}}{\binom{N}{k}} & j = k+1, \dots, N \end{cases} = \frac{\binom{j-1}{k-1}}{\binom{N}{k}} \qquad j = k, \dots, N$$

Domanda 2) Mario lancia una moneta (su cui, ad ogni lancio, esce testa con probabilità p e croce con probabilità $1-p$) k volte. Se al k-esimo lancio esce croce non compie ulteriori lanci. Se al k-esimo lancio esce testa, decide che continuerà a lanciare la moneta fino a che non uscirà la prima croce.
Calcolare, in funzione di k, il numero atteso di lanci.

....

Svolgimento X = lancio a cui ottengo la 1ª Testa

$$\mathbb{P}(X=j) = \begin{cases} 1-p & j=k \\ (1-p)p^{j-k} & j>k \end{cases} = (1-p)p^{j-k} \quad j \geq k$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=k}^{\infty} j(1-p)p^{j-k} \qquad j=k+s$$

$$= (1-p)\sum_{s=0}^{\infty}(k+s)p^s = (1-p)\left\{k\sum_{s=0}^{\infty}p^s + \sum_{s=0}^{\infty} s p^{s-1} p\right\}$$

$$= (1-p)\left\{\frac{k}{1-p} + p\frac{d}{ds}(1-p)^{-1}\right\} = (1-p)\left\{\frac{k}{1-p} + \frac{p}{(1-p)^2}\right\}$$

$$= k + \frac{p}{1-p}$$

Matricola - Nome e Cognome

Domanda 3) Su un segmento di lunghezza L si scelgono due punti, a caso ed in modo indipendente. Calcolare valore atteso e varianza della distanza tra i due punti.

....

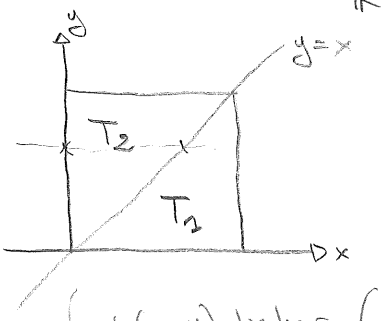
Svolgimento X = posizione 1° punto $\qquad \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = U((0,L))$

Y = posizione 2° punto $\qquad X, Y$ indipendenti

$$D = |X-Y| = \varphi\circ(X,Y) \qquad \varphi(x,y) = |x-y|$$

$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di Borel non negativa

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,\mathbb{P}_D(dt) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\varphi(x,y))\,\mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \frac{1}{L^2}\int_{(0,L)^2} \psi(|x-y|)\,dx\,dy$$



$$= \frac{1}{L^2}\left\{ \int_{T_1} \psi(x-y)\,dx\,dy + \int_{T_2} \psi(y-x)\,dx\,dy \right\}$$

$$\int_{T_1} \psi(x-y)\,dx\,dy = \int_0^L dx \int_0^x \psi(x-y)\,dy \qquad t = x-y \qquad dt = -dy$$

$$= \int_0^L dx \int_0^x \psi(t)\,dt = \int_0^L \psi(t)\left(\int_t^L 1\,dx\right)dt = \int_0^L \psi(t)(L-t)\,dt$$

$$\int_{T_2} \psi(y-x)\,dx\,dy = \int_0^L dy \int_0^y \psi(y-x)\,dx \qquad t = y-x \qquad dt = -dx$$

$$= \int_0^L dy \int_0^y \psi(t)\,dt = \int_0^L \psi(t)\left(\int_t^L 1\,dy\right)dt = \int_0^L \psi(t)(L-t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,\mathbb{P}_D(dt) = \frac{2}{L^2}\int_0^L \psi(t)(L-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,\underbrace{\frac{2(L-t)}{L^2}\mathbb{1}_{(0,L)}(t)}_{\text{densità di } D}\,dt$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[D] = \int_{\mathbb{R}} t\,\frac{2(L-t)}{L^2}\mathbb{1}_{(0,L)}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^L \frac{2}{L^2}(Lt - t^2)\,dt = \frac{2}{L^2}\left(\frac{Lt^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=L} =$$

$$= \frac{2}{L^2}\,\frac{L^3}{6} = \frac{L}{3}$$

$$\mathbb{E}[D^2] = \int_0^L t^2\,\frac{2(L-t)}{L^2}\,dt = \frac{2}{L^2}\int_0^L (Lt^2 - t^3)\,dt =$$

$$= \frac{2}{L^2}\left(\frac{Lt^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=L} = \frac{2}{L^2}\,\frac{L^4}{12} = \frac{L^2}{6}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}[D] = \frac{L^2}{6} - \left(\frac{L}{3}\right)^2 = L^2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) = \frac{L^2(3-2)}{18} = \frac{L^2}{18}$$

Domanda 4) Siano X e Y v.a. indipendenti su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Sapendo che $\mathbb{P}_X = B(n,p)$ e $\mathbb{P}_Y = B(m,p)$, verificare che $\mathbb{P}_{X+Y} = B(n+m,p)$.
Calcolare densità condizionata e valore atteso condizionato di X dato che $X+Y=k$.

....

Svolgimento $(X+Y)(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n+m\}$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{s=0}^{n} \mathbb{P}(X=s, Y=k-s) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} \binom{m}{k-s} p^{k-s} (1-p)^{m-(k-s)}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{m}{k-s} p^k (1-p)^{n+m-k} = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}$$

$$\mathbb{P}(X=j \mid X+Y=k) = \frac{\mathbb{P}(X=j, Y=k-j)}{\mathbb{P}(X+Y=k)} = \frac{\mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j)}{\mathbb{P}(X+Y=k)}$$

$$= \frac{\binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{m-(k-j)}}{\binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}} = \frac{\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{n+m}{k}}$$

densità ipergeometrica di parametri n, m, k

$\Rightarrow$ Il valore atteso condizionato è $k \cdot \frac{n}{n+m}$.