LEGGE DEBOLE DEI GRANDI NUMERI (27/11/15)

Supponiamo di lanciare una moneta non truccata molte volte.
Ci aspettiamo che circa la metà delle volte esca Testa e circa metà delle volte esca croce.
Se n è il numero dei lanci e per ogni $i=1 \ldots n$ consideriamo la v.a. X_i che vale 1 se ottengo Testa e 0 se ottengo croce $\Rightarrow$
$X_1 \ldots X_n$ sono v.a. i.i.d. con $\mathbb{P}_{X_i} = B(\frac{1}{2})$.
Inoltre il numero di Teste che ottengo è $S_n := X_1 + \ldots + X_n$
Mi aspetto che $S_n \sim \frac{n}{2}$ cioè $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \frac{1}{2} = \mathbb{E}[X_i]$
Questa è un'aspettativa giustificata.
Vale infatti il seguente Teorema:

TEO Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a.

- a due a due scorrelate
- Tali che $\mathbb{E}[X_n] = E \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Tali che $\exists C^2 \in \mathbb{R}$: $Var[X_n] \leq C^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sia $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$.
Allora

$$\int_\Omega \left| \frac{S_n}{n}(\omega) - E \right|^2 \mathbb{P}(d\omega) \leq \frac{C^2}{n}$$

e

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - E \right| > \delta \right) \leq \frac{C^2}{n\delta^2} \quad \forall \delta > 0.$$

DIM. Calcolo $\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{n} n E = E$
Mentre

$$Var\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}Var[S_n] = \frac{1}{n^2}\left\{ \sum_{k=1}^{n} Var[X_k] + 2 \sum_{1\leq i < j \leq n} \underbrace{\cancel{Cov(X_i, X_j)}}_{=0 \text{ per hp}} \right\}$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} C^2 = \frac{1}{n^2} n C^2 = \frac{C^2}{n}$$

Quest'ultima disuguaglianza si scrive esplicitamente come

$$\int_\Omega \left| \frac{S_n}{n}(\omega) - E \right|^2 \mathbb{P}(d\omega) \le \frac{C^2}{n}$$

Applicando la disuguaglianza di Chebychev alla v.a. $\frac{S_n}{n}$ si ha

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - E \right| > \delta \right) \le \frac{Var\left[\frac{S_n}{n}\right]}{\delta^2} \le \frac{C^2}{\delta^2 n} \qquad \forall \delta > 0.$$

Come conseguenza otteniamo che, nelle ipotesi del Teorema

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left| \frac{S_n}{n}(\omega) - E \right|^2 \mathbb{P}(d\omega) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - E \right| > \delta \right) = 0 \qquad \forall \delta > 0.$$ (LEGGE DEBOLE DEI GRANDI NUMERI)

In realtà, con ipotesi un po' più forti, vale una stima molto migliore

TEOREMA DI CERNOFF (no dim)

Siano $X_1 \dots X_n$ v.a. i.i.d t.c. $\exists \theta_0 > 0$ t.c. $\mathbb{E}\left[e^{\theta_0 |X_1|}\right] < +\infty$

Siano $E := \mathbb{E}[X_i]$ $i = 1 \dots n$

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$$

Per $\theta \in [0, \theta_0]$ e $\delta > 0$ siano

$$M(\theta) := \mathbb{E}\left[e^{\theta |X_1|}\right], \quad C(\delta) := \sup\{\theta\delta - \log M(\theta), \theta \in (0, \theta_0)\}$$

Allora

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - E \right| > \delta \right) \le 2 \exp\left(-n\, C(\delta)\right)$$

Vediamo ora dei risultati di convergenza per successioni di eventi.

Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$, allora l'unione $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ è anch'esso un evento che si chiama LIMITE SUPERIORE DI A_n:

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

LEMMA DI BOREL-CANTELLI Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di eventi in uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, allora $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$

DIM $\mathbb{P}(\limsup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

e dunque

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

da cui:

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \leq \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$ perché per ipotesi $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ converge.

Se aggiungiamo l'ipotesi che $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di eventi indipendenti, vale un risultato molto più forte, detto

LEGGE 0-1 DI KOLMOGOROV

Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di eventi indipendenti in uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Allora

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0 \quad \text{SSE} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$$

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1 \quad \text{SSE} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$$

DIM Abbiamo già dimostrato che se $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, allora $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$

Basta dunque dimostrare (con l'ipotesi che $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di eventi indipendenti) che se $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, allora $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Cominciamo ricordando che la funzione $f(x) = e^{-x}$ è convessa dunque $1 - x \leq e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Per $k, \ell \in \mathbb{N}$ $k < \ell$ consideriamo

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{\ell} A_n^c\right) = \prod_{n=k}^{\ell} \mathbb{P}(A_n^c) = \prod_{n=k}^{\ell} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \leq \prod_{n=k}^{\ell} \exp(-\mathbb{P}(A_n))$$

per l'ipotesi di indipendenza

$$= \exp\left(-\sum_{n=k}^{\ell} \mathbb{P}(A_n)\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{\ell} A_n^c\right) \leq \exp\left(-\sum_{n=k}^{\ell} \mathbb{P}(A_n)\right) \quad \forall \ell, k \;\; \ell > k$$

Passando a limite per $l \to \infty$ ottengo
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\Big) \leq \exp\Big(-\sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)\Big) = 0 \quad \text{perché la serie diverge}$$

Se mostro che $(\limsup A_n)^c \subset \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, allora ho concluso.

Sia $\omega \in (\limsup A_n)^c$: $\omega \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k} A_n$

$\exists \bar{k}$ t.c. $\omega \notin \bigcup_{n=\bar{k}}^{\infty} A_n$

$\exists \bar{k}$ t.c. $\omega \in A_n^c \quad \forall n \geq \bar{k} \Rightarrow \omega \in \bigcap_{n=\bar{k}}^{\infty} A_n^c$ come volevamo.

Dunque
$$\mathbb{P}\big((\limsup A_n)^c\big) \leq \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=\bar{k}} A_n^c\Big) = 0 \quad \text{e dunque } \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1 \quad \square$$

Anche in questo caso vale un risultato più forte che non dimostriamo

TEO (no dim)

Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di eventi a due a due indipendenti su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, allora $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}(\omega)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)} = 1 \quad \mathbb{P}$-q.c.

In particolare $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = +\infty \quad \mathbb{P}$-q.c., dunque

$\mathbb{P}$-q.c. $\omega \in$ infiniti insiemi A_n

$\mathbb{P}$-q.c. $\omega \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \omega \in \limsup A_n$

e dunque $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

— - —

FOGLIO 7 - EX 5

$\mathbb{P}_Y = \text{Poisson}(\lambda)$; $\quad X(\Omega) = \{0,1\}$ $\qquad Z := XY$

$\mathbb{P}(X=1 \mid Y=k) = \dfrac{1}{k+1} \quad \forall k = 0,1,2, \ldots$

$\mathbb{P}_X = ?$ $\qquad \mathbb{P}_Z = ?$

$X(\Omega) = \{0,1\} \Rightarrow X$ è sicuramente di Bernoulli

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{X=1, Y=k\}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=1, Y=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=1 \mid Y=k)\,\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_X = B\left(\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\right)$$

$Z = XY \Rightarrow Z(\Omega) = \mathbb{N}_0$

Per $k \geq 1$ abbiamo

$$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(XY=k) = \mathbb{P}(X=1, Y=k) = \mathbb{P}(X=1 \mid Y=k)\mathbb{P}(Y=k)$$
$$= \frac{1}{k+1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k+1)!}$$

Per $k=0$ abbiamo $\{Z=k\} = \{X=0\} \cup \{X=1, Y=0\} \Rightarrow$

$$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1 \mid Y=0)\mathbb{P}(Y=0) =$$
$$= 1 - \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{0+1}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = 1 - \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} + e^{-\lambda}$$

Rimangono da calcolare $\mathbb{E}[X \mid Y=t]$ e $\mathbb{E}[Y \mid X=t]$

Foglio 7 - Ex 3

$\mathbb{P}_X = \exp(\lambda)$, $\mathbb{P}_Y = U((0,a))$, X e Y indipendenti

$Z := X+Y \qquad T := X-Y$

Calcolare $\mathbb{P}_Z$ e $\mathbb{P}_T$

$\mathbb{P}_X = f(x)\,dx \qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$

$\mathbb{P}_Y = g(x)\,dx \qquad g(x) = \frac{1}{a}\mathbb{1}_{(0,a)}(x)$

$\Rightarrow \mathbb{P}_T = h(x)\,dx$ dove $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy$

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}}\frac{\lambda}{a}e^{-\lambda y}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y)\,\mathbb{1}_{(0,a)}(x-y)\,dy =$$

$$= \frac{\lambda}{a}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\,\mathbb{1}_{(0,a)}(x-y)\,dy \qquad s:=x-y \quad y=x-s$$

$$= \frac{\lambda}{a}\int_x^{-\infty} - e^{-\lambda x+\lambda s}\,\mathbb{1}_{(0,a)}(s)\,ds = \frac{\lambda}{a}e^{-\lambda x}\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda s}\,\mathbb{1}_{(0,a)}(s)\,ds$$

1° CASO $x<0 \Rightarrow h(x)=0$

2° CASO $0<x<a \Rightarrow h(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{a}\, e^{\lambda s}\Big|_{s=0}^{s=x} = \frac{e^{-\lambda x}}{a}(e^{\lambda x}-1) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{a}$

3° CASO $x>a \Rightarrow h(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{a}\, e^{\lambda s}\Big|_{s=0}^{s=a} = \frac{e^{-\lambda x}}{a}(e^{\lambda a}-1)$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{a}\,\mathbb{1}_{(0,a)}(x) + \frac{e^{-\lambda x}}{a}(e^{\lambda a}-1)\,\mathbb{1}_{(a,+\infty)}(x)$$

$T = X-Y = X+(-Y)$

Devo calcolare la densità di $-Y$

$P_Y = g(x)\,dx \qquad g(x) = \frac{1}{a}\mathbb{1}_{(0,a)}(x)$

$P_{-Y} = k(x)\,dx \qquad k(x) = \frac{1}{|-1|}\, g\left(\frac{x-0}{-1}\right) = g(-x) = \frac{1}{a}\mathbb{1}_{(-a,0)}(x)$

$\Rightarrow P_T = \ell(x)$ dove $\ell(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,k(x-y)\,dy$

$$\ell(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-\lambda y}\,\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(y)\,\frac{1}{a}\,\mathbb{1}_{(-a,0)}(x-y)\,dy =$$

$$= \frac{\lambda}{a}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\,\mathbb{1}_{(-a,0)}(x-y)\,dy \qquad s=x-y \quad y=x-s$$

$$= \frac{\lambda}{a}\int_x^{-\infty} - e^{-\lambda x+\lambda s}\,\mathbb{1}_{(-a,0)}(s)\,ds = \frac{e^{-\lambda x}}{a}\int_{-\infty}^{x} \lambda e^{\lambda s}\,\mathbb{1}_{(-a,0)}(s)\,ds$$

1° CASO $x<-a \Rightarrow \ell(x)=0$

2° CASO $-a<x<0 \quad \ell(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{a}\, e^{\lambda s}\Big|_{-a}^{x} = \frac{e^{-\lambda x}}{a}(e^{\lambda x} - e^{-\lambda a})$

3° CASO $x>0 \quad \ell(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{a}\, e^{\lambda s}\Big|_{-a}^{0} = \frac{e^{-\lambda x}}{a}(1-e^{-\lambda a})$

$$\Rightarrow \ell(x) = \frac{1-e^{-\lambda(a+x)}}{a}\,\mathbb{1}_{(-a,0)}(x) + \frac{e^{-\lambda x}}{a}(1-e^{-\lambda a})\,\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$