SPERANZA CONDIZIONATA.

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, $B \in \mathcal{E}$ $\mathbb{P}(B) > 0$ $\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A|B)$ $A \in \mathcal{E}$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}_B)$ è uno spazio probabilizzato

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. $\mathbb{E}_B[X] = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}_B(d\omega)$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}_B[X] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]$$

$$X = \mathbb{1}_A \qquad \mathbb{E}_B[\mathbb{1}_A] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A\cap B}]$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A)$$

— o —

Sia $\{B_n\}_{n\in J}$ $J = \{1 \dots n\}$ oppure $J = \mathbb{N}$

partizione di Ω in eventi di probabilità positiva

$\bigcup_{n\in J} B_n = \Omega$ $B_n \cap B_k = \emptyset$ $n \neq k$ $\mathbb{P}(B_n) > 0$

Sia $\mathcal{G}$ la σ-algebra generata da $\{B_n\}_{n\in J}$ $\Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$

$\forall A \in \mathcal{G}$ $\exists!\ J_A \subseteq J$ t.c. $A = \bigcup_{n\in J_A} B_n$

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. con valore atteso finito

Pongo

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \sum_{n\in J}\mathbb{E}_{B_n}[X]\mathbb{1}_{B_n}(\omega) \qquad \omega\in\Omega$$

$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\cdot)$ è costante su ciascun B_n $\Rightarrow$ è $\mathcal{G}$-misurabile e dunque anche $\mathcal{E}$-misurabile.

Sia $A \in \mathcal{G}$ $\Rightarrow$ $A = \bigcup_{n\in J_A} B_n$ per $J_A \subseteq J$ opportuno

Calcolo $\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega)\mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$

$$= \int_\Omega \sum_{n\in\mathcal{J}} \mathbb{E}_{B_n}[X]\, \underbrace{\mathbb{1}_{B_n}(\omega)\,\mathbb{1}_A(\omega)}\, \mathbb{P}(d\omega)$$

$$= \sum_{n\in\mathcal{J}} \int_\Omega \frac{1}{\mathbb{P}(B_n)} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{B_n}]\, \mathbb{1}_{B_n\cap A}(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$$A = \bigcup_{n\in\mathcal{J}_A} B_n$$

$$= \sum_{n\in\mathcal{J}_A} \int_\Omega \frac{1}{\mathbb{P}(B_n)} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{B_n}]\, \mathbb{1}_{B_n}(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$$= \sum_{n\in\mathcal{J}_A} \cancel{\frac{1}{\mathbb{P}(B_n)}} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{B_n}]\cancel{\mathbb{P}(B_n)} = \mathbb{E}\Big[\sum_{n\in\mathcal{J}_A} X\mathbb{1}_{B_n}\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[X\sum_{n\in\mathcal{J}_A}\mathbb{1}_{B_n}\Big] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_A X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall A\in\mathcal{G}$$

MISURE ASSOLUTAMENTE CONTINUE

Sia $(\Omega,\mathcal{E})$ uno spazio misurabile e siano μ e λ due misure su questo spazio

Dico che λ è ASSOLUTAMENTE CONTINUA RISPETTO A μ $(\lambda \ll \mu)$ se

$\forall A\in\mathcal{E}$ t.c. $\mu(A)=0$, si ha anche $\lambda(A)=0$

TEOREMA DI RADON–NIKODÝM

Sia $(\Omega,\mathcal{E})$ uno spazio misurabile e siano λ e μ due misure finite su questo spazio.

Sono equivalenti

1) $\lambda \ll \mu$

2) $\exists h : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $h \geq 0$ μ-q.o.
$h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\int_\Omega h(\omega)\mu(d\omega) < +\infty$

$$\forall A \in \mathcal{E} \quad \lambda(A) = \int_A h(\omega)\mu(d\omega)$$

Se h_1 e h_2 sono due funzioni $\mathcal{L}^1(\mu)$ che hanno queste proprietà, allora $h_1 = h_2$ μ-q.o.

TEOREMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato
Sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$ una σ-algebra e sia $\mathbb{P}_\mathcal{G}$ la restrizione di $\mathbb{P}$ a $\mathcal{G}$.
Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$
Allora $\exists Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_\mathcal{G})$ t.c.

$$\int_B Y(\omega)\, \mathbb{P}_\mathcal{G}(d\omega) = \int_B X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall B \in \mathcal{G}$$

Se Y_1 e Y_2 sono due v.a. con queste proprietà, allora $Y_1 = Y_2$ $\mathbb{P}_\mathcal{G}$-q.c.

DIM 1° CASO $X \geq 0$

$$\alpha : B \in \mathcal{G} \mapsto \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] \in \mathbb{R}$$

$(\Omega, \mathcal{G}, \alpha)$ è uno spazio di misura con α misura finita
$\alpha(\emptyset) = 0$
$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ $B_n \cap B_k = \emptyset$ $\alpha\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mathbb{E}\left[X \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}\right] =$

$$= \mathbb{E}\left[X \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_n}\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{B_n}] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(B_n)$$

$\alpha(\Omega) = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_\Omega] = \mathbb{E}[X]$ finito per ipotesi

$\alpha << \mathbb{P}_{\mathcal{G}}$ $\quad \mathbb{P}_{\mathcal{G}}(B)=0 \iff \mathbb{P}(B)=0 \quad X\mathbb{1}_B=0 \quad \mathbb{P}$-q.c.

$\Rightarrow \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]=0$ cioè $\alpha(B)=0$

Per Radon-Nikodým $\exists h: \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-misurabile

$h \geq 0 \quad \mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-q.c.

t.c. $\alpha(B)=\int_B h(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) \quad \forall B\in\mathcal{G}$

Se h_1 e h_2 sono due funzioni con queste proprietà, allora $h_1=h_2$ $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-q.c.

2° CASO $\quad X$ sommabile e di segno variabile.

$\Rightarrow X^+$ e X^- sono sommabili e non negative

$B\in\mathcal{G} \quad \alpha^+(B)=\mathbb{E}[X^+\mathbb{1}_B]=\int_B h^+(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)$

$\alpha^-(B)=\mathbb{E}[X^-\mathbb{1}_B]=\int_B h^-(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)$

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]=\mathbb{E}[X^+\mathbb{1}_B]-\mathbb{E}[X^-\mathbb{1}_B]=\int_B \underbrace{(h^+-h^-)}_{h}(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)$$

$h(\omega)$

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]=\int_B h_1(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)=\int_B h_2(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega) \quad \forall B\in\mathcal{G}$$

$B=\{h_1>h_2\} \qquad \int_B (h_1-h_2)(\omega)\,\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)=0$

$\Rightarrow h_1-h_2 \leq 0$ $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-q.c. e, analogamente $h_2-h_1\leq 0$ $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-q.c.

cioè $h_1=h_2$ $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$-q.c.

h si indica $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\cdot)$ e si dice

SPERANZA CONDIZIONATA DI X DATA LA σ-ALGEBRA $\mathcal{G}$

Se $\mathcal{G}=\sigma(Z)$ σ-algebra generata dalla v.a. Z

invece di scrivere $\mathbb{E}[X|\sigma(Z)]$ si scrive $\mathbb{E}[X|Z]$.

$\forall B \in \mathcal{G} \quad \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] = \int_B h(\omega) \mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)$

$A \in \mathcal{E} \quad X = \mathbb{1}_A \qquad \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B] = \int_B \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{G})(\omega) \mathbb{P}_{\mathcal{G}}(d\omega)$

$\qquad\qquad \parallel$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A\cap B}]$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discreta $\quad X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in \mathcal{I}}$

$\mathcal{I} = \{1, \dots n\}$ oppure $\mathcal{I} = \mathbb{N}$

Per semplicità $\quad p_i = \mathbb{P}(X = x_i) > 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}$

$B \in \mathcal{E}$ fissato. Al variare di $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ considero

$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap B)$

$\{X \in A\} = \bigcup_{x_i \in A} \{X = x_i\}$ unione finita o numerabile di insiemi disgiunti due a due

$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap B) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{x_i \in A} \{X = x_i\}\right) \cap B\right) =$

$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x_i \in A} \left(\{X = x_i\} \cap B\right)\right) = \sum_{x_i \in A} \mathbb{P}\left(\{X = x_i\} \cap B\right) =$

$= \sum_{x_i \in A} \underbrace{\mathbb{P}(B | X = x_i)}_{\varphi_B(x_i)} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x_i \in A} \varphi_B(x_i) \mathbb{P}_X(\{x_i\})$

$\varphi_B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(B | X = x) & x \in X(\Omega) \text{ e } \mathbb{P}_X(\{x\}) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$= \int_A \varphi_B(x) \mathbb{P}_X(dx)$

Fissato $B \in \mathcal{E}$ $\quad \exists\, \varphi_B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap B) = \int_A \varphi_B(x)\, \mathbb{P}_X(dx) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

— o —

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ con distribuzione congiunta A.C.

$$\mathbb{P}_{X,Y} = f(x,y)\,dx\,dy$$

Fisso $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\qquad B := Y^{-1}(D)$

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap B) = \mathbb{P}(X \in A, Y \in D) = \int_{A \times D} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_A dx \left(\int_D \frac{f(x,y)}{f_X(x)} f_X(x)\, dy \right) = \int_A \underbrace{\left(\int_D \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\, dy \right)}_{\varphi_D(x)} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_A \varphi_D(x)\, \mathbb{P}_X(dx)$$

$$\varphi_D(x) := \int_D \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\, dx$$

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_X(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) = 0\} \times \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}_{X,Y}(S) = \mathbb{P}((X,Y) \in S) = \int_S f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\{x \in \mathbb{R} : f_X(x) = 0\}} dx \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \right) = \int_{\{x \in \mathbb{R} : f_X(x) = 0\}} f_X(x)\, dx = 0$$

Il rapporto $\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ è $\mathbb{P}_{X,Y}$-q.c. ben definito

si chiama DENSITÀ di Y DATO CHE $\{X = x\}$

e si indica $h(y \mid x)$

Foglio 7 - Ex 1

$$\mathbb{P}_X(\{k\}) = G'(p)(\{k\}) = p(1-p)^k \quad k=0,1,2,\ldots$$

$$\mathbb{P}(Y=1 \mid X=k) = q^k \Rightarrow \mathbb{P}(Y=0 \mid X=k) = 1-q^k$$

Y è sicuramente di Bernoulli: $\mathbb{P}_Y = B(r)$ dove

$r = \mathbb{P}(Y=1) =$

$$\{Y=1\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{Y=1, X=k\}$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{Y=1, X=k\}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=1, X=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=1 \mid X=k)\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p(1-p)^k =$$

$$= p \sum_{k=0}^{\infty} (q(1-p))^k = p\,\frac{1}{1-q(1-p)} = \frac{p}{1-q(1-p)}$$

$$\mathbb{P}_Y = B(r) \qquad r = \frac{p}{1-q(1-p)} \qquad E[Y] = r = \frac{p}{1-q(1-p)}$$

$Z(\Omega) = \mathbb{N}_0$

$\mathbb{P}(Z=k) \qquad k=0,1,2,\ldots$

$$k \geq 1 \qquad \mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(XY=k) \qquad \{XY=k\} = \{X=k, Y=1\}$$

$$= \mathbb{P}(X=k, Y=1) =$$

$$= \mathbb{P}(Y=1 \mid X=k)\,\mathbb{P}(X=k) = q^k p(1-p)^k = p\left(q(1-p)\right)^k$$

$$k=0 \qquad \mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(XY=0) = (*)$$

$$\{XY=0\} = \{Y=0\} \cup \{X=0, Y=1\}$$

$$(*)\ \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1 \mid X=0)\,\mathbb{P}(X=0) =$$

$$= 1 - r + q^0 p(1-p)^0 =$$

$$= 1 - \frac{p}{1-q(1-p)} + p = \frac{1-q(1-\cancel{p}) - \cancel{p} + \cancel{p} - pq(\cancel{1}-p)}{1-q(1-p)}$$

$$= \frac{1-q+p^2 q}{1-q(1-p)}$$

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p\,(q(1-p))^{k-1+1} =$$

$$= pq(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}\Big|_{x=q(1-p)} = pq(1-p)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^{k}\right)\Big|_{x=q(1-p)}$$

$$= pq(1-p)\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}-1\right)\right)_{x=q(1-p)} = pq(1-p)\frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=q(1-p)} =$$

$$= \frac{pq(1-p)}{(1-q(1-p))^2}$$