VARIANZA E COVARIANZA

X, Y v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \left(\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]\right)^{1/2}$$

$$\mathcal{L}^k(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) = \left\{ X : X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ v.a. t.c. } \mathbb{E}[|X|^k] < +\infty \right\}$$

Tutti gli $\mathcal{L}^k(\mathbb{P})$ sono spazi vettoriali

$$\alpha : (X, Y) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{P}) \mapsto \mathbb{E}[XY] \in \mathbb{R}$$

Forma bilineare simmetrica semidefinita positiva

$$\alpha(X, X) = \mathbb{E}[X^2] = 0 \quad \not\Rightarrow \quad X = 0$$

$$\Rightarrow \quad X = 0 \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

$$a(\omega) = \frac{X(\omega)}{\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}} \qquad b(\omega) = \frac{Y(\omega)}{\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}} \qquad \omega \in \Omega$$

$$2\,a(\omega)\,b(\omega) \leq a^2(\omega) + b^2(\omega)$$

$X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ $\qquad \left|\mathbb{E}[XY]\right| \leq \left(\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]\right)^{\frac{1}{2}}$

$Y \equiv 1$ $\qquad |\mathbb{E}[X]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$

$$X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}) \Rightarrow X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Dato X, Y v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2]$ finite definisco COVARIANZA tra X e Y

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\Big]$$

Se $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, allora X e Y si dicono SCORRELATE

$\mathrm{Cov} : (X,Y) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{P}) \mapsto \mathrm{Cov}(X,Y) \in \mathbb{R}$

è una funzione bilineare, simmetrica

$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}[X]$

$\mathrm{Cov}(X,X) = 0 \quad \mathrm{Var}[X] = 0 \qquad X = C \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\big] =$$
$$= \mathbb{E}\big[XY - X\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]Y + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\big] =$$
$$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - \cancel{\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]} + \cancel{\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$$

$\mathrm{Cov}(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha\gamma \,\mathrm{Cov}(X,Y)$

$$\mathrm{Cov}(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) =$$
$$= \mathbb{E}\big[(\alpha X + \cancel{\beta} - \mathbb{E}[\alpha X + \cancel{\beta}])(\gamma Y + \cancel{\delta} - \mathbb{E}[\gamma Y + \cancel{\delta}])\big]$$
$$= \alpha\gamma\,\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\big]$$

$X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} (x - \mathbb{E}[X])(y - \mathbb{E}[Y])\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} xy\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$$

Pongo $\varphi(s,t) = (s - \mathbb{E}[X])(t - \mathbb{E}[Y])$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_\Omega (X(\omega) - \mathbb{E}[X])(Y(\omega) - \mathbb{E}[Y])\, \mathbb{P}(d\omega)$$

$$= \int_\Omega f\circ(X,Y)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\int_\Omega f_+\circ(X,Y)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f_+(s,t)\,\mathbb{P}_{X,Y}(ds\,dt)$$

$$\int_\Omega f_-\circ(X,Y)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f_-(s,t)\,\mathbb{P}_{X,Y}(ds\,dt)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\,\mathbb{P}_{X,Y}(ds\,dt)$$

$$\left|\mathbb{E}[XY]\right| \le \left(\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]\right)^{1/2}$$

$$\tilde{X} = X - \mathbb{E}[X] \qquad \tilde{Y} = Y - \mathbb{E}[Y] \qquad \Rightarrow \mathbb{E}[\tilde{X}\tilde{Y}] = \mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathbb{E}[\tilde{X}^2] = \mathrm{Var}[X]$$

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}^2] = \mathrm{Var}[Y]$$

$$\left|\mathrm{Cov}(X,Y)\right| \le \sqrt{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]}$$

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]}} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

— ∘ —

$$\mathbb{E}[XY] \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]}$$

$$a(\omega) = \frac{X(\omega)}{\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}} \qquad b(\omega) = \frac{Y(\omega)}{\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}}$$

$$2a(\omega)b(\omega) \le a^2(\omega) + b^2(\omega) \qquad (a(\omega) - b(\omega))^2 \ge 0$$

$$\int_\Omega (a(\omega)-b(\omega))^2 \, \mathbb{P}(d\omega) \geq 0$$

$$a(\omega) = b(\omega) \quad \mathbb{P}\text{-q.c.} \qquad X(\omega) = \sqrt{\frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[Y^2]}}\, Y(\omega)$$

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+ \ \text{t.c.} \quad X = CY \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

$$\tilde{X} = X - \mathbb{E}[X] \qquad \tilde{Y} = Y - \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sqrt{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]} \implies \tilde{X} = C\tilde{Y}$$

$$X - \mathbb{E}[X] = C\left(Y - \mathbb{E}[Y]\right) \qquad X = CY + D \qquad C > 0$$

$$D \in \mathbb{R}$$

— o —

$$(X,Y) \qquad \mathbb{P}_{X,Y} \qquad \mathbb{P}_X \ \text{e} \ \mathbb{P}_Y$$

MISURE PRODOTTO E TEO DI FUBINI-TONELLI

Siano $(\Omega_1, \mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$ spazi di misura con $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ misure σ-finite.

La famiglia

$$\mathcal{R} = \{ A \times B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 : A \in \mathcal{E}_1, B \in \mathcal{E}_2 \}$$

si dice FAMIGLIA DEI RETTANGOLI MISURABILI in $\Omega_1 \times \Omega_2$.

La σ-algebra generata da $\mathcal{R}$ si indica $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$

N.B. Se $(\Omega_1, \mathcal{E}_1) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ $(\Omega_2, \mathcal{E}_2) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$

allora $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ (dim per esercizio)

TEOREMA Se $(\Omega_1, \mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$ sono due spazi di misura con $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ misure σ-finite,

allora $\exists ! \ \lambda : \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \to \mathbb{R}$ misura t.c.

$$\lambda(A \times B) = \mathbb{P}_1(A)\,\mathbb{P}_2(B) \quad \forall A \times B \in \mathcal{R}$$

Inoltre anche λ è σ-finita.

Di più, se $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ sono misure finite anche λ è una misura finita;

se $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ sono misure di probabilità, anche λ è una misura di probabilità.

λ si indica col simbolo $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$.

TEOREMA DI FUBINI-TONELLI

Siano $(\Omega_1, \mathcal{E}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{E}_2, \mathbb{P}_2)$ spazi di misura con $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ misure σ-finite.

Sia $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$-misurabile

<u>Allora</u>

$\forall \omega_1 \in \Omega_1 \quad \omega_2 \in \Omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ è $\mathcal{E}_2$-misurabile

$\forall \omega_2 \in \Omega_2 \quad \omega_1 \in \Omega_1 \mapsto f(\omega_1, \omega_2) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ è $\mathcal{E}_1$-misurabile

$$\omega_1 \in \Omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\, \mathbb{P}_2(d\omega_2) \quad \text{è } \mathcal{E}_1\text{-misurabile}$$

$$\omega_2 \in \Omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\, \mathbb{P}_1(d\omega_1) \quad \text{è } \mathcal{E}_2\text{-misurabile}$$

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\, (\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)(d\omega_1 d\omega_2) =$$

$$= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\, \mathbb{P}_2(d\omega_2) \right) \mathbb{P}_1(d\omega_1)$$

$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\, \mathbb{P}_1(d\omega_1) \right) \mathbb{P}_2(d\omega_2)$$

— o —

V.A. INDIPENDENTI

Se $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ è uno spazio probabilizzato, allora $A, B \in \mathcal{E}$ si dicono indipendenti se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(B) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$ v.a su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

X e Y si dicono INDIPENDENTI se

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

ovvero $\quad \mathbb{P}_{X,Y}(A \times B) = \mathbb{P}_X(A)\mathbb{P}_Y(B) \quad \forall (A,B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

ovvero $\quad \mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$

PROPOSIZIONE Siano $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Sono fatti equivalenti

1) X e Y sono v.a. indipendenti cioè $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$

2) $\forall \varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$- misurabile nonnegativa

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi(x,y)\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x,y)\, \mathbb{P}_Y(dy) \right) \mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,y)\, \mathbb{P}_X(dx) \right) \mathbb{P}_Y(dy)$$

3) $F_{X,Y}(t,s) = F_X(t) F_Y(s) \qquad \forall (t,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

DIM $1 \Rightarrow 2$ È l'enunciato del Teo di Fubini Tonelli

$2 \Rightarrow 1$ Per $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

scelgo $\varphi(x,y) = \mathbb{1}_{A\times B}(x,y) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)$

$$\mathbb{P}_{X,Y}(A\times B) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)\, \mathbb{P}_Y(dy) \right) \mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x)\, \mathbb{P}_Y(B)\, \mathbb{P}_X(dx) = \mathbb{P}_Y(B)\,\mathbb{P}_X(A)$$

$1 \Rightarrow 3$ $\quad t = (t_1 \ldots t_n) \qquad s = (s_1 \ldots s_m)$

$$A = \prod_{i=1}^n (-\infty, t_i] \qquad B = \prod_{i=1}^m (-\infty, s_i]$$

$$\mathbb{P}_{X,Y}(A\times B) = F_{X,Y}(t,s)$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{P}_X(A)\,\mathbb{P}_Y(B) = F_X(t) F_Y(s)$$

$3 \Rightarrow 1$ $\quad F_{X,Y}(t,s) = F_X(t) F_Y(s)$

Ma la legge di $\mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$ è proprio $F_X(\cdot)F_Y(\cdot)$

e dunque $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$

PROP Siano $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $Y: \Omega \to \mathbb{R}^m$ v.a. indipendenti

su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Sia $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funzione $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ - misurabile e sia $\beta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ funzione $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$- misurabile

Allora le v.a. $\alpha \circ X : \Omega \to \mathbb{R}^h$ e $\beta \circ Y : \Omega \to \mathbb{R}^k$ sono v.a. indipendenti

DIM Sia $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

$$\mathbb{P}(\alpha \circ X \in A, \beta \circ Y \in B) = \mathbb{P}(X \in \alpha^{-1}(A), Y \in \beta^{-1}(B))$$
$$= \mathbb{P}(X \in \alpha^{-1}(A))\, \mathbb{P}(Y \in \beta^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\alpha \circ X \in A)\, \mathbb{P}(\beta \circ Y \in B)$$

TEO Valore atteso del prodotto di v.a. indipendenti

Siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con valore atteso finito

Se X e Y sono indipendenti, allora $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

cioè se X e Y sono indipendenti allora sono scorrelate.

DIM $\mathbb{E}[|XY|] = \int_{\mathbb{R}^2} |xy|\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) =$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |x| \cdot |y|\, \mathbb{P}_X(dx) \right) \mathbb{P}_Y(dy) = \int_{\mathbb{R}} |y|\, \mathbb{E}[|X|]\, \mathbb{P}_Y(dy)$$

$$= \mathbb{E}[|X|]\, \mathbb{E}[|Y|].$$

Ripetendo il calcolo senza valore assoluto trovo

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

$A_1 \ldots A_n$ eventi di $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$A_1 \ldots A_n$ si dice una famiglia di eventi indipendenti se

$\forall k = 2, \ldots n$ $\quad \forall A_{r_1} \ldots A_{r_k}$ scelti tra $A_1 \ldots A_n$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{r_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{r_j})$$

FAMIGLIE FINITE DI V.A. INDIPENDENTI

Siano $X_1, \ldots X_n$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con $X_j : \Omega \to \mathbb{R}^{k(j)}$

1) Dico che le $X_1 \ldots X_n$ sono indipendenti due a due se $\forall i, j \in \{1 \ldots n\}$ t.c. $i \neq j$ le v.a. X_i e X_j sono indipendenti

2) Dico che $X_1 \dots X_n$ sono v.a. indipendenti se $\forall A_1 \dots A_n$ $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k(j)})$ gli eventi
$E_1 = X_1^{-1}(A_1)$ $E_2 = X_2^{-1}(A_2)$ $\dots$ $E_n = X_n^{-1}(A_n)$
sono una famiglia di eventi indipendenti.

SUCCESSIONE DI V.A. INDIPENDENTI

Sia $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$
Dico che $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ è una successione di v.a. indipendenti se $\forall n \geq 2$ le v.a. $X_1 \dots X_n$ sono una famiglia di n. v.a. indipendenti.

PROPRIETÀ Siano $X_1 \dots X_n$ una famiglia di v.a. indipendenti su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.
Allora 1) Ogni sottofamiglia è ancora una famiglia di v.a. indipendenti
2) Se $\{X_{r_1} \dots X_{r_k}\}$ e $\{X_{s_1} \dots X_{s_q}\}$ sono due sottofamiglie disgiunte della famiglia $X_1 \dots X_n$, allora le v.a.
$$X = (X_{r_1}, X_{r_2}, \dots X_{r_k})$$
$$Y = (X_{s_1}, X_{s_2}, \dots X_{s_q})$$
sono v.a. indipendenti

DIM 1) Senza perdere in generalità posso supporre che le sottofamiglie scelte sia $X_1 \dots X_k$.
Siano $A_1 \dots A_k$ boreliani (se $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^{s(i)} \Rightarrow A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{s(i)})$)
$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_k \in A_k) =$$
$$= \mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_k \in A_k, X_{k+1} \in \mathbb{R}^{s(k+1)}, \dots X_n \in \mathbb{R}^{s(n)})$$
$$= \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \dots \mathbb{P}(X_k \in A_k) \mathbb{P}(\underbrace{X_{k+1} \in \mathbb{R}^{s(k+1)}}_{\Omega}) \dots \mathbb{P}(\underbrace{X_n \in \mathbb{R}^{s(n)}}_{\Omega})$$
$$= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i \in A_i) \underbrace{1 \dots 1}_{(n-k) \text{ volte}}$$