ESERCIZI e V.A. VETTORIALI

Titolo nota 30/10/2015

FOGLIO 5 - EX 6

$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$

$Y(\Omega) \subseteq (-1,1)$

$F_Y(t) = \mathbb{P}(\phi) = 0 \quad$ se $\quad t \leq -1$

$F_Y(t) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad$ se $\quad t \geq 1$

$t \in (-1,0) \quad F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(-1 < X < 1, X \leq t) =$

$= \mathbb{P}(-1 < X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) - \mathbb{P}(X \leq -1) = \Phi(t) - \Phi(-1)$

$\underline{F_Y(t) = \Phi(t) - 1 + \Phi(1)}$

$\Phi(s) + \Phi(-s) = 1 \quad \forall s \in \mathbb{R} \qquad \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$

$t \in [0,1) \quad F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y<0) + \mathbb{P}(0<Y\leq t)$

$\{Y=0\} = \{X \leq -1\} \cup \{X \geq 1\} \cup \underline{\{X=0\}}$, evento quasi-impossibile

$F_Y(t) = \mathbb{P}(X \leq -1) + \mathbb{P}(X \geq 1) + \mathbb{P}(-1<X<1, X<0) +$

$+ \mathbb{P}(-1<X<1, 0<X\leq t)$

$= \mathbb{P}(X \leq -1) + \mathbb{P}(X \geq 1) + \mathbb{P}(-1<X<0) + \mathbb{P}(0<X\leq t)$

$= \mathbb{P}(X \leq t) + \mathbb{P}(X \geq 1)$

$= \mathbb{P}(X \leq t) + 1 - \mathbb{P}(X < 1)$

$= \Phi(t) + 1 - \Phi(1)$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ \Phi(t) - 1 + \Phi(1) & -1 \leq t < 0 \\ \Phi(t) + 1 - \Phi(1) & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

F_Y non è continua $\Rightarrow$ non può essere una funzione integrale

$\Rightarrow \mathbb{P}_Y$ non è AC.

$\mathbb{P}(Y=0) > 0$

FOGLIO - EX 7

$Y(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$

$p_{-1} = \mathbb{P}(Y=-1) = \mathbb{P}(X \leq \mu - \sigma) = ⊛$

Se X_0 è una v.a. t.c. $\mathbb{P}_{X_0} = N(0,1) \Rightarrow \mu + \sigma X_0$ è una v.a. con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$ cioè $\mathbb{P}_{\mu+\sigma X_0} = \mathbb{P}_X$

$⊛ = \mathbb{P}(\mu + \sigma X_0 \leq \mu - \sigma) = \mathbb{P}(X_0 \leq -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$

$p_0 = \mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \mathbb{P}(\mu - \sigma < \mu + \sigma X_0 < \mu + \sigma)$
$= \mathbb{P}(-1 < X_0 < 1) = \mathbb{P}(X_0 < 1) - \mathbb{P}(X_0 \leq -1)$
$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1))$
$= 2\Phi(1) - 1$

$p_1 = \mathbb{P}(Y=1) \qquad \{Y=1\} = \Omega \setminus (\{Y=0\} \cup \{Y=-1\})$

$p_1 = \mathbb{P}(Y=1) = 1 - (p_0 + p_{-1}) = 1 - (\cancel{1} - \Phi(1) + 2\Phi(1) \cancel{-1}) =$
$= 1 - \Phi(1)$

$p_1 = p_{-1} = 1 - \Phi(1) \qquad p_0 = 2\Phi(1) - 1$

$\mathbb{E}[Y] = -1 \cdot p_{-1} + 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 = -p_{-1} + p_1 = 0$

$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] = (-1)^2 p_{-1} + 0^2 p_0 + 1^2 p_1 = 2p_1 = 2(1 - \Phi(1))$

FOGLIO 5 - EX 8

$\mathbb{P}_X = \exp(\lambda) \qquad X$ è AC. con densità $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$

$Y = \varphi \circ X \qquad \varphi(t) = e^t$

Sia ψ funzione di Borel nonnegativa

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t)\, \mathbb{P}_{\varphi\circ X}(dt) = \int_{\mathbb{R}} \psi(\varphi(s))\, \mathbb{P}_X(ds) = \int_{\mathbb{R}} \psi(e^s)\, \lambda e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(s)\, ds$$

$$= \int_0^{+\infty} \psi(e^s)\, \lambda e^{-\lambda s}\, ds \qquad x = e^s \qquad s = \log(x) \qquad ds = \frac{1}{x} dx$$

$s = 0 \qquad x = 1$

$e^{-\lambda s} = (e^s)^{-\lambda} \qquad s \to +\infty \qquad x \to +\infty$

$$= \int_1^{+\infty} f(x)\,\lambda\, x^{-\lambda} \frac{1}{x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(x)\,dx$$

$$g(x) = \begin{cases} \lambda x^{-\lambda-1} & x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \mathbb{P}_Y = g(x)\,dx$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} x\, g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \lambda x^{-\lambda}\,dx =$$

$$= \begin{cases} \log(x)\Big|_{x=1}^{x\to+\infty} = +\infty & \lambda = 1 \\ \dfrac{\lambda}{-\lambda+1}\, x^{-\lambda+1}\Big|_{x=1}^{x\to+\infty} & \lambda \neq 1,\ \lambda > 0 \end{cases}$$

$-\lambda+1 > 0 \qquad x^{-\lambda+1} \to +\infty \qquad 0 < \lambda < 1 \qquad \mathbb{E}[Y] = +\infty$

$-\lambda+1 < 0 \qquad x^{-\lambda+1} \to 0$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{\lambda}{-\lambda+1}(0-1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \qquad \lambda > 1$$

$\mathbb{E}[Y] = +\infty \qquad \lambda \in (0,1]$

$\mathbb{E}[Y] = \dfrac{\lambda}{\lambda-1} \qquad \lambda > 1$

$\boxed{\lambda > 1}$ $\quad \mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^2 \lambda x^{-\lambda-1}\,dx = \int_1^{+\infty} \lambda x^{1-\lambda}\,dx$$

$1-\lambda = -1 \qquad \lambda = 2 \qquad \displaystyle\int_1^{+\infty} 2x^{-1}\,dx = 2\log(x)\Big|_{x=1}^{x\to+\infty} = +\infty$

$\lambda > 1,\ \lambda \neq 2 \qquad \dfrac{\lambda}{2-\lambda}\, x^{2-\lambda}\Big|_{x=1}^{x\to+\infty}$

$2-\lambda > 0 \qquad \lambda < 2 \qquad \lambda \in (1,2) \qquad \mathbb{E}[Y^2] = +\infty$

$2-\lambda < 0 \qquad \lambda > 2 \qquad \mathbb{E}[Y^2] = \dfrac{\lambda}{2-\lambda}(0-1) = \dfrac{\lambda}{\lambda-2}$

$$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{\lambda}{\lambda-2} - \frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2} = \frac{\lambda\left((\lambda-1)^2 - (\lambda-2)\lambda\right)}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2}$$

$$= \frac{\lambda}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2}\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \lambda^2 + 2\lambda\right) = \frac{\lambda}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2}$$

$$E[Y] = \begin{cases} +\infty & \lambda \in (0,1] \\ \dfrac{\lambda}{\lambda-1} & \lambda > 1 \end{cases}$$

$$Var[Y] = \begin{cases} \text{non definita} & \lambda \in (0,1] \\ +\infty & \lambda \in (1,2] \\ \dfrac{\lambda}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2} & \lambda > 2 \end{cases}$$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato , $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

$\mathbb{P}_X$, F_X

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. $\qquad (X,Y) : \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$

ESEMPIO

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) \qquad \Omega = [0,1] \qquad \mathcal{E} = \mathcal{B}([0,1]) \qquad \mathbb{P} = \mathcal{L}^1 |_{\mathcal{E}}$

Fisso $E, F \in \mathcal{E}$

$X = 1\!\!1_E , \quad Y = 1\!\!1_F$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathcal{L}^1(E^c) = 1 - \mathcal{L}^1(E)$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathcal{L}^1(E)$

$\mathbb{P}(Y=0) = \mathcal{L}^1(F^c) = 1 - \mathcal{L}^1(F)$

$\mathbb{P}(Y=1) = \mathcal{L}^1(F)$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathcal{L}^1(E \cap F)$

1° CASO $\qquad E_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \qquad F_1 = \left(\frac{2}{3}, 1\right)$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathcal{L}^1(E_1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(Y=1) = \mathcal{L}^1(F_1) = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X=0) = 1 - \mathcal{L}^1(E_1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(Y=0) = 1 - \mathcal{L}^1(F_1) = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathcal{L}^1(E_1 \cap F_1) = \mathcal{L}^1(\emptyset) = 0$

2° CASO $\qquad E_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \qquad F_2 = \left(0, \frac{1}{3}\right)$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathcal{L}^1(E_2) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(Y=1) = \mathcal{L}^1(F_2) = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X=0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(Y=0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathcal{L}^1(E_2 \cap F_2) = \mathcal{L}^1(F_2) = \frac{1}{3}$

CASO DISCRETO

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in A}$ $\quad A =$ insieme finito o numerabile

v.a. discrete

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$

$Y(\Omega) = \{y_j\}_{j \in B}$ $\quad B =$ insieme finito o numerabile

$(X,Y) : \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$

$(X,Y)(\Omega) \subseteq X(\Omega) \times Y(\Omega) \Rightarrow$ anche $(X,Y)(\Omega)$ è un insieme finito o numerabile

Per ogni $(x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ pongo

$$p_{ij} := \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \qquad (i,j) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

Sia $x_i \in X(\Omega)$ $\quad \{X = x_i\} = \bigcup_{j \in \mathcal{B}} \{X = x_i, Y = y_j\}$

$$C_j = \{Y = y_j\} \qquad j \in \mathcal{B}$$

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in \mathcal{B}} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j \in \mathcal{B}} p_{ij}$$

$\forall j \in \mathcal{B} \qquad \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i \in \mathcal{A}} p_{ij}$

Il valore p_{ij} $(i,j) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ si dice DENSITÀ CONGIUNTA DI X E Y in (x_i, y_j)

Le densità delle v.a. X e Y si dicono DENSITÀ MARGINALI DELLA V.A (X,Y).

V.A. VETTORIALE (def)

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato.

Siano $X_1, \_\_ X_N : \Omega \to \mathbb{R}$ funzioni

Dico che la funzione

$$X = (X_1, \_\_ X_N) : \omega \in \Omega \mapsto (X_1(\omega) \_\_ X_N(\omega)) \in \mathbb{R}^N$$

è una v.a. vettoriale se

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \qquad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{E}$$

PROP Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato.

Siano $X_1 \_\_ X_N$ funzioni da Ω in $\mathbb{R}$

Allora $X=(X_1 \ldots X_N)$ è una v.a. vettoriale SSE tutte le funzioni $X_1 \ldots X_N$ sono v.a.

DIM Supponiamo che X sia una v.a. vettoriale. Faccio vedere che X_1 è una v.a.

Sia $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\{X_1 \in B\} = \{X_1 \in B, X_2 \in \mathbb{R}, \ldots \ldots X_N \in \mathbb{R}\}$

$$= \{X \in A\}$$

$$A = B \times \mathbb{R} \times \ldots \ldots \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$$

Viceversa Supponiamo che $X_1 \ldots X_N$ siano v.a.

$\forall (a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ $\forall i = 1 \ldots N$ $\{X_i \in (a_i, b_i]\} \in \mathcal{E}$

$R = \prod_{i=1}^{N} (a_i, b_i]$ $\{X \in R\} = \bigcap_{i=1}^{N} \{X_i \in (a_i, b_i]\} \in \mathcal{E}$

$A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ R_k N-rettangoli

$$\{X \in A\} = \{X \in \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X \in R_k\} \in \mathcal{E}$$

Sia $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R}^N \text{ t.c. } X^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}$

allora $\mathcal{F}$ è una σ-algebra di $\mathcal{E}$ (DIM per esercizio)

$\Rightarrow \{X \in A\} \in \mathcal{E}$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

— o —

Sia $X = (X_1 \ldots X_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Poiché per $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $\{X \in A\} \in \mathcal{E}$, è ben definita

$$\mathbb{P}(X \in A) =: \mathbb{P}_X(A)$$

È ben definita $\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \in [0,1]$

e la coppia $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mathbb{P}_X)$ è una misura di probabilità su $\mathbb{R}^N$ chiamata DISTRIBUZIONE CONGIUNTA di $X = (X_1 \ldots X_N)$

Le distribuzioni $\mathbb{P}_{X_1}, \mathbb{P}_{X_2} \ldots \mathbb{P}_{X_N}$ si dicono DISTRIBUZIONI MARGINALI di $X = (X_1 \ldots X_N)$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{P}_{X_1}(A) = \mathbb{P}(X_1 \in A) = \mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in \mathbb{R} \ldots X_N \in \mathbb{R})$

$= \mathbb{P}_X(A \times \mathbb{R}^{N-1})$

$t = (t_1 \ldots t_N) \in \mathbb{R}^N$ pongo

$F_X(t_1 \ldots t_N) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \ldots, X_N \leq t_N)$

$= \mathbb{P}_X\left(\prod_{i=1}^{N} (-\infty, t_i]\right)$

La funzione F_X si dice LEGGE CONGIUNTA di $X_1 \ldots X_N$