Titolo nota 27/10/2015

DISTRIBUZIONI A.C.

DISTRIBUZIONE UNIFORME SU UN INTERVALLO (a,b)

$U((a,b))$ è la distribuzione associata alla densità

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$$

Se X è v.c. $\mathbb{P}_X = U((a,b))$, allora

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t < b \\ 1 & t \ge b \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2}$$ punto medio di (a,b)

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \Rightarrow$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA (o NORMALE) di parametri $m \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$

$N(m, \sigma^2)$ è la distribuzione A.C. associata alla densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Dobbiamo verificare che $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$t = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$$

$$dx = \sigma\sqrt{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2)\, \sigma\sqrt{2}\,dt$$

È noto che $\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}$ e dunque

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sigma\sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2)dt = 1$$

Se $m=0$ e $\sigma=1$, la distribuzione si dice GAUSSIANA STANDARD e la sua legge si indica con la lettera Φ.

Sia X_0 v.a. t.c. $\mathbb{P}_{X_0} = N(0,1)$

$$\mathbb{E}[|X_0|] = \int_{\mathbb{R}} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx < +\infty \implies$$

$$\mathbb{E}[X_0] = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = 0$$

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-x)\left(-x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ (-x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} + \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \right\} \qquad t = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 0 + \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2}\exp(-t^2)dt \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi} = 1$$

Sia ora X_0 t.c. $\mathbb{P}_{X_0} = N(0,1)$ e siano $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

Considero la v.a. $X = m + \sigma X_0$

X_0 è A.C. con densità $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

dunque X ha distribuzione A.C. con densità

$$g(x) = \frac{1}{|\sigma|} f_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

cioè $X := m + \sigma X_0$ ha distribuzione gaussiana di parametri m e σ^2.

Allora, ogni v.a. Y di distribuzione $N(m,\sigma^2)$ ha lo stesso valore atteso e la stessa varianza di X cioè

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[m+\sigma X_0] = m + \sigma\mathbb{E}[X_0] = m + \sigma\cdot 0 = m$$

$$Var[X] = Var[m+\sigma X_0] = \sigma^2 Var[X_0] = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

Torniamo alla distribuzione gaussiana standard $N(0,1)$ e alla sua legge Φ

Φ gode della proprietà $\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$

Questa è una proprietà condivisa da tutte le leggi di distribuzioni A.C. con densità pari:

DIM Sia $\mathbb{P}_X = f(x)dx$ con f pari e sia F_X la legge corrispondente:

$$F_X(-t) = \int_{-\infty}^{-t} f(x)dx = \text{Cambio variabile } y=-x$$

$$= \int_{+\infty}^{t} -1 \cdot f(y)dy = \int_{t}^{+\infty} f(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)dy - \int_{-\infty}^{t} f(y)dy$$

$= 1 - F_X(t)$, da cui la Tesi

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO $\lambda > 0$

E' la distribuzione A.C. $\exp(\lambda)$ associata alla densità

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Se X è v.c. $\mathbb{P}_X = \exp(\lambda)$, allora $X \geq 0$ $\mathbb{P}$-q.c. dunque

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} (-x)(-\lambda e^{-\lambda x}) dx =$$

$$= (-x)e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 0 + \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{+\infty} (-x^2)(-\lambda e^{-\lambda x})\,dx$$

$$= -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\,dx = 0 + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Calcoliamo anche la legge $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx =$

$$= \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx & t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

Se X è v.c. $\mathbb{P}_X = \exp(\lambda)$, allora X gode di una proprietà analoga a quella di cui godono le v.a. con distribuzione geometrica modificata. Più precisamente

$$\mathbb{P}(X \le t+s \mid X \ge t) = \mathbb{P}(X \le s) \qquad \forall t, s \ge 0$$

(MANCANZA DI MEMORIA)

Infatti abbiamo:

$$\mathbb{P}(X \le t+s \mid X \ge t) = \frac{\mathbb{P}(X \le t+s,\ X \ge t)}{\mathbb{P}(X \ge t)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \le t+s) - \mathbb{P}(X < t)}{1 - \mathbb{P}(X < t)}$$

Poiché F_X è continua si ha:

$$= \frac{F_X(t+s) - F_X(t)}{1 - F_X(t)} = \frac{(\cancel{1} - e^{-\lambda t - \lambda s}) - (\cancel{1} - e^{-\lambda t})}{\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-\lambda t})} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(-e^{-\lambda s} + 1)}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s} = F_X(s) = \mathbb{P}(X \le s) \quad \boxtimes$$

Questa proprietà caratterizza le v.a. con distribuzione esponenziale. Più precisamente:

PROPOSIZIONE Sia X v.a. a valori in $[0,+\infty)$ la cui legge F_X è t.c. $F_X(0)<1$

Sono fatti equivalenti

1. X è priva di memoria
2. X ha distribuzione esponenziale di parametro

$$\lambda = -\log(1-F_X(1))$$

DIM. Abbiamo già dimostrato che $2 \Rightarrow 1$

Per dimostrare che $1 \Rightarrow 2$ abbiamo bisogno di un lemma

LEMMA Sia $\alpha : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ funzione continua o monotone

t.c. $\alpha(t+s) = \alpha(t) + \alpha(s) \quad \forall t,s \geq 0$

Allora $\alpha(t) = t\alpha(1) \quad \forall t \geq 0$ _

DIM $\alpha(t+s) = \alpha(t) + \alpha(s) \quad \forall t,s \geq 0$

Scegliendo $t=s=0$ ottengo $\alpha(0) = 2\alpha(0) \Rightarrow \alpha(0) = 0$

$t=s=1 \Rightarrow \alpha(2) = \alpha(1) + \alpha(1) = 2\alpha(1)$

$t=2,\ s=1 \Rightarrow \alpha(3) = \alpha(2) + \alpha(1) = 3\alpha(1)$

Supponiamo $\alpha(n) = n\alpha(1)$, dimostro che $\alpha(n+1) = (n+1)\alpha(1)$:

$$\alpha(n+1) = \alpha(n) + \alpha(1) = n\alpha(1) + \alpha(1) = (n+1)\alpha(1)$$

Dunque abbiamo dimostrato, per induzione, che

$$\alpha(n) = n\alpha(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Riconsidero $\alpha(t+s) = \alpha(t) + \alpha(s)$

$$\alpha(t_1+t_2+t_3) = \alpha(t_1+t_2) + \alpha(t_3) = \alpha(t_1) + \alpha(t_2) + \alpha(t_3)$$

Per induzione: $\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(t_i)$:

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i\right) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} t_i + t_{n+1}\right) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) + \alpha(t_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(t_i) + \alpha(t_{n+1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(t_i)$$

Dunque $\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(t_i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (t_1 \ldots t_n)\ t_i \geq 0$

Scelgo $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} t_i = 1$

e dunque ho $\alpha(1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\left(\frac{1}{n}\right) = n\alpha\left(\frac{1}{n}\right)$

Cioè $\alpha\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\alpha(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Scelgo $t = s = \frac{1}{n}$ e ottengo

$$\alpha\left(\frac{2}{n}\right) = \alpha\left(\frac{1}{n}\right) + \alpha\left(\frac{1}{n}\right) = 2\alpha\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}\alpha(1)$$

Scelgo $t = \frac{2}{n}$, $s = \frac{1}{n}$ e ottengo

$$\alpha\left(\frac{3}{n}\right) = \alpha\left(\frac{2}{n}\right) + \alpha\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}\alpha(1) + \frac{1}{n}\alpha(1) = \frac{3}{n}\alpha(1)$$

Supponiamo $\alpha\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}\alpha(1)$

Calcolo $\alpha\left(\frac{k+1}{n}\right) = \alpha\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) = \alpha\left(\frac{k}{n}\right) + \alpha\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{k}{n}\alpha(1) + \frac{1}{n}\alpha(1)$

$$= \frac{k+1}{n}\alpha(1)$$

Dunque abbiamo provato per induzione che

$$\alpha\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}\alpha(1) \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

ovvero $\alpha(q) = q\,\alpha(1) \quad \forall q \in \mathbb{Q}_+$ (razionale non negativo)

Sia ora $x \in \mathbb{R}_+$

1) Se α è continua:

$\exists \{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}_+$ t.c. $\lim_{n\to\infty} q_n = x \Rightarrow$

$$\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha(q_n) = \lim_{n\to\infty} q_n\,\alpha(1) = x\,\alpha(1) \qquad \boxtimes$$

2) Se α è monotona (p.es. monotona crescente)

Allora $\exists \{p_n\}_{n=1}^{\infty}, \{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}_+$ t.c.

$$p_n \nearrow x, \quad q_n \searrow x$$

$$p_n < p_{n+1} < x < q_{n+1} < q_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ma α monotona crescente $\Rightarrow$

$$(*) \qquad \alpha(p_n) < \alpha(p_{n+1}) < \alpha(x) < \alpha(q_{n+1}) < \alpha(q_n)$$

$\alpha(p_n) = p_n\,\alpha(1) \to x\,\alpha(1)$, $\alpha(q_n) = q_n\,\alpha(1) \to x\,\alpha(1)$

Sostituendo in $(*)$ $\quad x\,\alpha(1) \le \alpha(x) \le x\,\alpha(1)$

e dunque $\alpha(x) = x\,\alpha(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$

Concludiamo la dim della proposizione

Supponiamo che X è distribuita su $[0,+\infty)$ e che

$$\mathbb{P}(X \le t+s \mid X \ge t) = \mathbb{P}(X \le s) \quad \forall t,s \ge 0$$

cioè
$$\frac{\mathbb{P}(t \le X \le t+s)}{\mathbb{P}(X \ge t)} = \mathbb{P}(X \le s)$$

ovvero
$$\frac{F_X(t+s) - F_X(t^-)}{1-F_X(t^-)} = F_X(s) \qquad F_X(t^-) := \lim_{u \to t^-} F_X(u)$$

Sia $\delta_X(t) = F_X(t) - F_X(t^-) = \mathbb{P}(X=t) \Rightarrow F_X(t^-) = F_X(t) - \delta_X(t)$

Sostituendo ottengo
$$F_X(t+s) - F_X(t) + \delta_X(t) = F_X(s)\left(1 - F_X(t) + \delta_X(t)\right) \quad \forall t,s \ge 0$$

F_X è continua da destra, quindi per $s \to 0^+$ ottengo
$$\delta_X(t) = F_X(0)\left(1 - F_X(t) + \delta_X(t)\right)$$

$$\Rightarrow \delta_X(t) = \frac{F_X(0)\left(1 - F_X(t)\right)}{1 - F_X(0)}$$

Per hp $F_X(0) < 1$. Se fosse $F_X(0) > 0$, allora esisterebbe un intervallo $[0, \varepsilon)$ t.c. $F_X(t) \in (0,1)$ $\forall t \in [0,\varepsilon)$ e dunque $\delta_X(t) > 0$ $\forall t \in [0,\varepsilon)$

Questo è assurdo perché $\delta_X(t) \ne 0$ al più per una infinità numerabile di valori di t $\Rightarrow$ deve essere $F_X(0) = 0$ e dunque $\delta_X(t) = 0$ $\forall t \in [0,+\infty)$

La $(*)$ diventa dunque
$$F_X(t+s) - F_X(t) = F_X(s)\left(1 - F_X(t)\right)$$

Calcolo
$$(1-F_X(s))(1-F_X(t)) = 1 - \cancel{F_X(t)} - F_X(t+s) + \cancel{F_X(t)}$$

cioè
$$(1-F_X(s))(1-F_X(t)) = 1 - F_X(t+s) \quad \forall t,s \ge 0$$

Supponiamo $\exists\, \bar{x} > 0$ t.c. $F_X(\bar{x}) = 1$

Scelgo $t = s = \frac{\overline{x}}{2}$ e ottengo $F_X\left(\frac{\overline{x}}{2}\right) = 1$

Scelgo $t = s = \frac{\overline{x}}{2^2}$ e ottengo $F_X\left(\frac{\overline{x}}{2^2}\right) = 1$

Iterando $F_X\left(\frac{\overline{x}}{2^n}\right) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

e, passando a limite per $n \to \infty$ $\quad F_X(0) = 1$ ASSURDO

$$F_X(t) \in (0,1) \quad \forall t \in (0,+\infty)$$

Riconsidero $(1-F_X(s))(1-F_X(t)) = 1 - F_X(t+s)$

e passo ai logaritmi

$$\log(1-F_X(s)) + \log(1-F_X(t)) = \log(1-F_X(t+s))$$

Pongo $\alpha(t) = \log(1-F_X(t))$

Per il lemma $\alpha(t) = t\,\alpha(1) \quad \forall t \geq 0$ cioè

$$\log(1-F_X(t)) = t \log(1-F_X(1))$$

$$\Rightarrow \quad 1 - F_X(t) = e^{(\log(1-F_X(1)))t}$$

$$F_X(t) = 1 - e^{-t(-\log(1-F_X(1)))} = 1 - e^{-\lambda t}$$

dove $\lambda := -\log(1-F_X(1)) > 0$

Questa F_X è la legge associata a $\exp(\lambda) \Rightarrow P_X = \exp(\lambda)$