DISTRIBUZIONI DISCRETE

Titolo nota 28/10/2015

Abbiamo introdotto la distribuzione binomiale negativa

$$B(-n,p)(\{k\}) = \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Sia X v.a. t.c. $\mathbb{P}_X = B(-n,p)$. Calcoliamo valore atteso e varianza

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k \qquad z = p-1$$

$$= p^n \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{n+k-1}{k} (-1)^k z^k \Big|_{z=p-1} = p^n \cdot z \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-n}{k} k z^{k-1} \Big|_{z=p-1} \quad (*)$$

$$= p^n \cdot z \frac{d}{dz} (1+z)^{-n} \Big|_{z=p-1} = p^n \cdot (-n) \cdot z (1+z)^{-n-1} \Big|_{z=p-1} =$$

$$= \cancel{p^n} \cdot n(1-p)\, p^{\cancel{-n}-1} = \frac{n(1-p)}{p}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k = p^n \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \binom{n+k-1}{k} (-1)^k z^k \Big|_{z=p-1} =$$

$$= p^n \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1+1) \binom{-n}{k} z^k \Big|_{z=p-1} =$$

$$= p^n z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} k(k-1) z^{k-2} \Big|_{z=p-1} + \underbrace{p^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} k z^k \Big|_{z=p-1}}_{(*)\ \frac{n(1-p)}{p}}$$

$$= p^n z^2 \frac{d^2}{dz^2} (1+z)^{-n} \Big|_{z=p-1} + \frac{n(1-p)}{p} =$$

$$= p^n z^2 (-n)(-n-1)(1+z)^{-n-2} + \frac{n(1-p)}{p} =$$

$$= \cancel{p^n} (1-p)^2\, n(n+1)\, p^{\cancel{-n}-2} + \frac{n(1-p)}{p} = \frac{n(n+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{n(1-p)}{p} =$$

$$= \frac{n(1-p)}{p^2} \Big((n+1)(1-p) + p \Big) = \frac{n(1-p)}{p^2} \Big(n - np + 1 \Big)$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{n(1-p)}{p^2}(n-np+1) - \left(\frac{n(1-p)}{p}\right)^2 =$$

$$= \frac{n(1-p)}{p^2}\left(\cancel{n} - \cancel{np} + 1 - \cancel{n} + \cancel{np}\right) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

Come costruire una v.a. t.c. $P_X = B(-n,p)$?

Supponiamo di voler scrivere uno spazio di probabilità che modellizzi un esperimento di Bernoulli ripetuto infinite volte.

Ω = successioni a valori in $\{0,1\}$, si indica $\{0,1\}^\infty$.

Ω è in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $[0,1]$

$\left(\{\omega_i\}_{i=1}^\infty \longmapsto \sum_{i=1}^\infty \frac{\omega_i}{2^i}\right.$ scrittura in forma binaria$\left.\right)$

quindi ha la cardinalità del continuo.

Chi prendo come σ-algebra?

E' naturale richiedere che gli esperimenti ripetuti in cui si impone il risultato di un # finito di prove siano eventi.

Per $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \{0,1\}^n$ considero il CILINDRO FINITO SOPRA A

$$E_{n,A} = \{\omega = \{\omega_i\}_{i=1}^\infty \in \Omega : (\omega_1, \ldots \omega_n) \in A\}$$

La famiglia $\mathcal{Q}$ data dell'insieme vuoto e da tutti i cilindri finiti è un anello su Ω:

1) $\phi \in \mathcal{Q}$

2) Dati $E_{n,A}, E_{m,B} \in \mathcal{Q}$ posso sempre supporre $n=m$, infatti

se $k := \max\{m,n\}$ pongo

$\tilde{A} = A \times \{0,1\}^{k-n} \Rightarrow E_{n,A} = E_{k,\tilde{A}}$

$\tilde{B} = B \times \{0,1\}^{k-m} \Rightarrow E_{m,B} = E_{k,\tilde{B}}$

Senza perdere in generalità posso dunque supporre $n=m$.

Si ha allora

$$E_{n,A} \setminus E_{n,B} = \{\omega = (\omega_i)_{i=1}^\infty : (\omega_1 \ldots \omega_n) \in A \setminus B\}$$

$$E_{n,A} \cup E_{n,B} = \{\omega = (\omega_i)_{i=1}^\infty : (\omega_1 \ldots \omega_n) \in A \cup B\}$$

$E_{n,A} \cap E_{n,B} = \{\omega = (\omega_i)_{i=1}^{\infty} : (\omega_1 \_\_ \omega_n) \in A \cap B\}$

Prendo $\mathcal{E} := \sigma(\mathcal{A})$

Per ogni $E_{n,A} \in \mathcal{A}$ pongo $\mathbb{P}(E_{n,A}) = \mathbb{P}_n(A)$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ dove $\mathbb{P}_n$ è la probabilità su $\{0,1\}^n, \mathcal{P}(\{0,1\}^n)$ associata alle prove di Bernoulli ripetute n volte:

$$\mathbb{P}_n(\{(\omega_1 \_\_ \omega_n)\}) = p^k (1-p)^{n-k} \quad k = \# \text{componenti di } (\omega_1 \_\_ \omega_n) \text{ che valgono } 1$$

Si può dimostrare che $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ è una funzione σ-additiva.

Dimostriamo solo che è finitamente additiva

1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ sì

2) $E_{n,A}, E_{n,B} \in \mathcal{A}$ t.c. $E_{n,A} \cap E_{n,B} = \emptyset \Rightarrow$

$A, B \subseteq \{0,1\}^n$ e $A \cap B = \emptyset$. Dunque

$$\mathbb{P}(E_{n,A} \cup E_{n,B}) = \mathbb{P}(E_{n,A\cup B}) = \mathbb{P}_n(A \cup B) = \mathbb{P}_n(A) + \mathbb{P}_n(B)$$
$$= \mathbb{P}(E_{n,A}) + \mathbb{P}(E_{n,B}) \quad \boxtimes$$

Se considero la funzione $X: \{0,1\}^{\infty} \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ che conta il # di insuccessi che devo ottenere prima di ottenere l'n-esimo successo.

$\{X = k\} = E_{n+k, A}$ dove

$A = \{(\omega_1 \_\_ \omega_{n+k})$ t.c. $\omega_{n+k} = 1$ (successo) e in $(\omega_1 \_\_ \omega_{n+k-1})$ ci sono $n-1$ successi e k insuccessi$\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(E_{n+k}, A) = \mathbb{P}_n(A) = p \cdot \binom{n+k-1}{k} p^{n-1} (1-p)^k$ cioè

$\mathbb{P}_X = B(-n, p)$.

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA DI PARAMETRO $p \in (0,1)$

E' la distribuzione concentrata sugli interi positivi di densità

$$G(p)(\{k\}) = p(1-p)^{k-1} \quad \forall k = 1, 2, \_\_$$

Verifichiamo che è una distribuzione di probabilità:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G(p)(\{k\}) = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^{j} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1 \quad \checkmark$$

Se X è una v.a. t.c. $\mathbb{P}_X = G(p)$, allora

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}\Big|_{x=1-p} = p\left(\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\Big|_{x=1-p} =$$

$$= p\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right)\Big|_{x=1-p} = p\,(1-x)^{-2}\Big|_{x=1-p} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1} =$$

$$= xp\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}\Big|_{x=1-p} + \frac{1}{p} =$$

$$= \left(px\frac{d^2}{dx^2}\sum x^k\right)\Big|_{x=1-p} + \frac{1}{p} = px\frac{d^2}{dx^2}(1-x)^{-1}\Big|_{x=1-p} + \frac{1}{p} =$$

$$= px\, 2\,(1-x)^{-3}\Big|_{x=1-p} + \frac{1}{p} = \frac{2p(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}[X] = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

Possiamo costruire una v.a. t.c. $\mathbb{P}_X = G(p)$?

Ripeto un esperimento di Bernoulli infinite volte

$\Omega = \{0,1\}^{\infty}$, $\mathcal{E} = \sigma$-algebra generata dai cilindri finiti

$\mathbb{P}$ come costruita in precedenza.

Sia X = prova a cui ottengo il primo successo

$$X(\omega) = \begin{cases} \min\{i : \omega_i = 1\} & \text{se } \exists i \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \omega_i = 1 \\ +\infty & \text{se } \omega_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\{X = +\infty\} = \{(0,0,\_\_\_\_)\}$

Quanto vale $\mathbb{P}(\{(0,0\_\_\_\_)\})$

Considero $A_1 = \{(0)\}$ $\quad E_{1,A_1} = \{(\omega_i)_{i=1}^{\infty} : \omega_1 = 0\}$

$A_2 = \{(0,0)\}$ $\quad E_{2,A_2} = \{(\omega_i)_{i=1}^{\infty} : \omega_1 = \omega_2 = 0\}$

$\vdots$

$$A_n = \{(\underbrace{0, \_\_\_ 0}_{n \text{ volte}})\} \quad E_{n,A_n} = \{(\omega_i)_{i=1}^{\infty} : \omega_1 = \omega_2 = \_\_\_ = \omega_n = 0\}$$

$$\Rightarrow E_{n,A_n} \supset E_{n+1, A_{n+1}} \quad e \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,A_n} = \{(0,0,0,\_\_\_)\}$$

Per la continuità delle misure di probabilità

$$\mathbb{P}(\{(0,0,\_\_\_)\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,A_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_{n,A_n}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(A_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1-p)^n = 0 \quad \text{poiché } p \in (0,1) \Rightarrow 1-p \in (0,1) \subseteq (-1,1)$$

Per $k \in \mathbb{N}$, quanto vale $\mathbb{P}(X=k)$?

$$\{X=k\} = \{(\omega_i)_{i=1}^{\infty} : \omega_1 = \_\_\_ = \omega_{k-1} = 0, \omega_k = 1\} = E_{k,A}$$

dove $A = \{(\underbrace{0, \_\_\_ 0}_{k-1 \text{ volte}}, 1)\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(E_{k,A}) = \mathbb{P}_k(A) = (1-p)^{k-1} \cdot p \Rightarrow \mathbb{P}_X = G(p)$$

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA MODIFICATA

È la distribuzione concentrata sugli interi nonnegativi di densità

$$G'(p)(\{k\}) = p(1-p)^k \qquad k = 0, 1, \_\_\_$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} G'(p)(\{k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1 \quad \checkmark$$

Una v.a. che ha distribuzione $G'(p)$ è la v.a. Y che conta quanti insuccessi ottengo prima di ottenere il primo successo. Dunque, se X è la v.a. che mi indica a quale prova ottengo il primo successo, avrò $Y = X-1$, $\mathbb{P}_X = G(p)$

Dunque $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X-1] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[1] = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$

$$Var[Y] = Var[X-1] = Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

MANCANZA DI MEMORIA

Sia X v.c. $\mathbb{P}_X = G'(p)$

Per $i, j \in \mathbb{N}_0$ considero $\mathbb{P}(X \leq i+j \mid X \geq j)$:

$$\mathbb{P}(X \leq i+j \mid X \geq j) = \frac{\mathbb{P}(j \leq X \leq i+j)}{\mathbb{P}(X \geq j)} = \frac{\mathbb{P}(X \leq i+j) - \mathbb{P}(X \leq j-1)}{1 - \mathbb{P}(X \leq j-1)}$$

$$= \frac{F_X(i+j) - F_X(j-1)}{1 - F_X(j-1)}$$

Per $k \in \mathbb{N}_0$ calcolo dunque $F_X(k) = \sum_{s=0}^{k} \mathbb{P}(X=s) = \sum_{s=0}^{k} p(1-p)^s \Rightarrow$

$$F_X(k) = p \, \frac{1-(1-p)^{k+1}}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^{k+1}$$

Sostituisco e ottengo

$$\mathbb{P}(X \leq i+j \mid X \geq j) = \frac{(\cancel{1} - (1-p)^{i+j+1}) - (\cancel{1} - (1-p)^j)}{\cancel{1} - (\cancel{1} - (1-p)^j)} =$$

$$= \frac{(1-p)^j - (1-p)^{i+j+1}}{(1-p)^j} = 1 - (1-p)^{i+1} = F_X(i) = \mathbb{P}(X \leq i)$$

La proprietà $\mathbb{P}(X \leq i+j \mid X \geq j) = \mathbb{P}(X \leq i) \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

è detta PROPRIETÀ DI MANCANZA DI MEMORIA

Questa proprietà caratterizza completamente la distribuzione geometrica modificata. Più precisamente

PROPOSIZIONE Sia X v.a. distribuita sugli interi nonnegativi t.c.

$\mathbb{P}(X=0) = p \in (0,1)$

Allora $\mathbb{P}_X = G'(p)$ SSE X è priva di memoria

DIM Abbiamo già visto che se $\mathbb{P}_X = G'(p) \Rightarrow X$ è priva di memoria

Dimostriamo il viceversa.

Nella proprietà di mancanza di memoria scelgo $i=0$

$$\mathbb{P}(X \leq j \mid X \geq j) = \mathbb{P}(X=0)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X \geq j)} = p$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=j) = p \, \mathbb{P}(X \geq j)$$

per $j+1$ $\quad \mathbb{P}(X=j+1) = p \, \mathbb{P}(X \geq j+1)$

sottraggo membro a membro

$$\mathbb{P}(X=j) - \mathbb{P}(X=j+1) = p \, \mathbb{P}(X=j)$$

cioè $\mathbb{P}(X=j+1) = (1-p)\,\mathbb{P}(X=j) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$

$j=0 \quad \mathbb{P}(X=1) = (1-p)\mathbb{P}(X=0) = (1-p)p$

$j=1 \quad \mathbb{P}(X=2) = (1-p)\mathbb{P}(X=1) = (1-p)^2 p$

$j=2 \quad \mathbb{P}(X=3) = (1-p)\,\mathbb{P}(X=2) = (1-p)^3 p$

Supponiamo che $\mathbb{P}(X=j) = (1-p)^j p$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=j+1) = (1-p)\mathbb{P}(X=j) = (1-p)^{j+1} p$

e dunque abbiamo dimostrato per induzione che

$$\mathbb{P}(X=j) = p(1-p)^j \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$$

cioè $\mathbb{P}_X = G'(p)$