VARIANZA, MEDIANA, DISUGUAGLIANZE

X funzione misurabile non negativa su uno spazio di misura $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, allora

$$\int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X>t)\,dt$$

DIM 1° CASO X funzione semplice nonnegativa

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \qquad \{E_i\} \subset \mathcal{E} \text{ partizione di } \Omega$$

$$0 \le c_1 < c_2 < \dots c_N$$

$$E_i = \{X = c_i\}$$

$$\{X>t\} = \bigcup_{i=1}^{N} (\{X>t\} \cap E_i)$$

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X>t)\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\{X>t\}\cap E_i)\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\{X>t\}\cap E_i)\,dt = (\star)$$

$$\{X>t\}\cap E_i = \{\omega\in\Omega : X(\omega)>t,\ X(\omega)=c_i\} = \begin{cases} \emptyset & t \ge c_i \\ E_i & t < c_i \end{cases}$$

$$(\star) = \sum_{i=1}^{N} \left(\int_0^{c_i} \mathbb{P}(E_i)\,dt + \int_{c_i}^{+\infty} \mathbb{P}(\emptyset)\,dt \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{P}(E_i) = \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

2° CASO X misurabile nonnegativa

So che $\exists \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ successione di funzioni semplici nonnegative che approssima X dal basso.

$$\int_\Omega f_k(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(f_k > t)\,dt$$

Applico Beppo Levi a f_k: $\int_\Omega f_k(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \to \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$

$$\{X > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k > t\} \qquad \{f_k > t\} \subset \{f_{k+1} > t\}$$

$$\mathbb{P}(f_k > t) \to \mathbb{P}(X > t)$$ per la continuità delle misure

$g_k(t) = \mathbb{P}(f_k > t)$ $\qquad g_k(t) \le g_{k+1}(t)$

$\forall t \quad g_k(t) \to \mathbb{P}(X > t)$

Applico Beppo Levi alle $\{g_k\}$ e ottengo

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(f_k > t)\,dt \to \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,dt$$

e dunque $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,dt = \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$

— o —

X misurabile nonnegativa su spazio di misura $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = 0$ SSE $X = 0$ $\mathbb{P}$-q.o.

1) $X = 0$ $\mathbb{P}$-q.o. :

$\exists\, \Omega_0 \subset \Omega : \mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0 \quad X(\omega) = 0 \ \forall \omega \in \Omega_0$

Ogni funzione semplice f t.c. $0 \le f \le X$ ha la forma $f(\omega) = 0 \cdot \mathbb{1}_{\Omega_0}(\omega) + \sum c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega)$ dove $E_i \subset \Omega \setminus \Omega_0 \ \forall i$

$\Rightarrow \mathbb{P}(E_i) = 0 \ \forall i$

$\Rightarrow \int_\Omega f(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \underbrace{0 \cdot \mathbb{P}(\Omega_0)}_{=0} + \sum c_i \cancel{\mathbb{P}(E_i)}^{=0} = 0$

2) $\int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = 0$, $X \geq 0$

Per $n \in \mathbb{N}$ considero $E_n = \{X \geq \frac{1}{n}\}$

$$X(\omega) \geq \frac{1}{n}\mathbb{1}_{E_n}(\omega) + 0 \cdot \mathbb{1}_{E_n^c}(\omega) = f_n(\omega)$$

$$0 = \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \geq \int_\Omega f_n(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_n)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(E_n) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{n}\right) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\{X > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X \geq \frac{1}{n}\right\} \qquad \left\{X \geq \frac{1}{n+1}\right\} \supset \left\{X \geq \frac{1}{n}\right\}$$

Per la continuità delle misure

$$\mathbb{P}(X > 0) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

— o —

X v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con valore atteso $\mathbb{E}[X]$ finito

Chiamo VARIANZA di X $\quad \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$

e la indico $\mathrm{Var}[X]$.

1) $\mathrm{Var}[X] \geq 0$, $\forall X$ ←

$\mathrm{Var}[X] = 0$ SSE $X = \mathbb{E}[X]$ $\mathbb{P}$-q.c.

SCARTO QUADRATICO MEDIO di X

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

2) $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

3) $\mathrm{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2\,\mathrm{Var}[X] \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

DIM 2 $\quad \mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2\,\mathbb{E}[X]\,X + (\mathbb{E}[X])^2\right] =$

$= \mathbb{E}[X^2] - 2\,\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2$

$= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

DIM 3 $\quad$ PER ESERCIZIO

DISUGUAGLIANZA DI MARKOV

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ sp. probabilizzato e sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.
Supponiamo che esista un intervallo $I \supset X(\Omega)$ e una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ nonnegativa, di Borel e strettamente crescente.
Allora $\forall t \in I \quad f(t)\mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{E}[f \circ X]$

DIM $\quad f(t)\mathbb{P}(X>t) = f(t)\mathbb{P}(f\circ X > f(t)) =$

$$= f(t)\int_\Omega \mathbb{1}_{\{f\circ X > f(t)\}}(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega f(t)\,\mathbb{1}_{\{f\circ X > f(t)\}}(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\leq \int_\Omega \underbrace{(f\circ X)(\omega)\,\mathbb{1}_{\{f\circ X > f(t)\}}(\omega)}_{\geq f(t)\mathbb{1}_{\{f\circ X > f(t)\}}(\omega) \ \forall \omega \in \Omega}\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\leq \int_\Omega (f\circ X)(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[f\circ X]$$

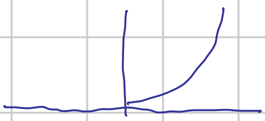
DISUGUAGLIANZA DI CHEBYCHEV

Sia X v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con valore atteso finito $\mathbb{E}[X]$.
Allora

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon) \leq \frac{Var[X]}{\varepsilon^2} \qquad \forall \varepsilon > 0$$

DIM Applico la disuguaglianza di Markov alla v.a. $Y = |X - \mathbb{E}[X]|$

$Y(\Omega) \subset [0, +\infty)$



$f: t \in [0, +\infty) \mapsto t^2 \in \mathbb{R}$

$$t^2\,\mathbb{P}(Y > t) \leq \mathbb{E}[Y^2]$$

$$t^2\,\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > t) \leq Var[X]$$

MEDIANA DI V.A.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \le t) \in [0,1]$

$$t_M := \inf \left\{ t \in \mathbb{R} : F_X(t) \geq \frac{1}{2} \right\}$$

t_M si dice MEDIANA di X

Poiché F_X è continua da destra $F_X(t_M) \geq \frac{1}{2}$

$\forall s < t_M \quad F_X(s) < \frac{1}{2}$

$$\lim_{s \to t_M^-} F_X(s) \leq \frac{1}{2}$$

Se F_X è continua in $t_M \Rightarrow F_X(t_M) = \frac{1}{2}$.

DISTRIBUZIONI DI FUNZIONI COMPOSTE (Esercizi)

Se X è v.a. di legge F_X e se $Y = X^2$ allora Y ha legge

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cancel{\mathbb{P}(X=0)} & \cancel{t=0} \\ F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) + \mathbb{P}(X = -\sqrt{t}), & t \geq 0 \end{cases}$$

Supponiamo X abbia distribuzione assolutamente continua con densità f_X

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$$

Per $\mathcal{L}$-q.o. $t \in \mathbb{R}$ $\exists F'_X(t) = f_X(t)$

$$F_Y(t) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(x)\,dx$$

$$t > 0 \quad f_Y(t) = f_X(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}} + f_X(-\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})\right)$$

X v.a. φ funzione di Borel, ψ di Borel nonnegativa

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(s)\,\mathbb{P}_{\varphi \circ X}(ds) = \int_{\mathbb{R}} \psi(\varphi(t))\,\mathbb{P}_X(dt)$$

X v.a. con distribuzione A.C. e densità f_X

$\varphi(t) = t^2$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(s)\,\mathbb{P}_{X^2}(ds) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t^2) f_X(t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \psi(t^2) f_X(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} \psi(t^2) f_X(t)\,dt$$

$u = t^2$ ① $t = \sqrt{u}$ ② $t = -\sqrt{u}$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(u) f_X(\sqrt{u}) \frac{1}{2\sqrt{u}} du + \int_{+\infty}^{0} \varphi(u) f_X(-\sqrt{u}) \frac{-1}{2\sqrt{u}} du$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(u) f_X(\sqrt{u}) \frac{1}{2\sqrt{u}} du + \int_0^{+\infty} \varphi(u) f_X(-\sqrt{u}) \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(u) \frac{f_X(\sqrt{u}) + f_X(-\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} du = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) f_Y(u) du$$

$$f_Y(u) = \begin{cases} \dfrac{f_X(\sqrt{u}) + f_X(-\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO

Sia X v.a. con distribuzione A.C. e densità f_X
Per $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, calcolare la distribuzione di $Y = aX + b$.

$f(t) = at + b$ è lineare $\Rightarrow$ sicuramente di Borel

Sia φ funzione di Borel nonnegativa

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \, \mathbb{P}_{f \circ X}(dt) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(f(s)) \, \mathbb{P}_X(ds) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(as+b) f_X(s) \, ds \qquad u = as+b \qquad s = \frac{u-b}{a}$$

$a > 0$
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(u) f_X\left(\frac{u-b}{a}\right) \frac{1}{|a|} du$$

$a < 0$
$$\int_{+\infty}^{-\infty} \varphi(u) f_X\left(\frac{u-b}{a}\right) \frac{1}{a} du = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) f_X\left(\frac{u-b}{a}\right) \frac{1}{|a|} du$$

$\Rightarrow Y = aX + b$ ha distribuzione A.C. con densità $\quad f_Y(u) = \dfrac{1}{|a|} f_X\left(\dfrac{u-b}{a}\right)$

Es 1 FOGLIO 4

$$\mathbb{P}(9.8 \le X \le 10.2) = \int_{9.8}^{10.2} f_X(x)\,dx = 2\int_{9.8}^{10} f_X(x)\,dx =$$

$$= 2\int_{9.8}^{10} 4(x-9.5)\,dx = 4(x-9.5)^2 \Big|_{x=9.8}^{x=10}$$

$$= 4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2\right) = 4\,\frac{25-9}{100} = \frac{4\cdot 16}{100} = \frac{64}{100} = 0.64$$

$$\mathbb{P}(S \geq 19) = \mathbb{P}(S=19) + \mathbb{P}(S=20)$$

$$= \binom{20}{19}(0.64)^{19}(1-0.64) + \binom{20}{20}(0.64)^{20}(1-0.64)^0$$

$$= (0.64)^{19}(20\cdot 0.36 + 0.64) = (0.64)^{19}\, 7.84$$

ESERCIZIO 2 FOGLIO 4

$$g_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \dfrac{f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} & t > 0 \end{cases}$$

Se $t \in (0,1) \Rightarrow \sqrt{t} \in (0,1) \Rightarrow f_X(\sqrt{t}) = \sqrt{t}$

$-\sqrt{t} \in (-1,0) \Rightarrow f_X(-\sqrt{t}) = \sqrt{t}$

$t \geq 1 \quad \sqrt{t} \geq 1 \Rightarrow f_X(\sqrt{t}) = 0$

$-\sqrt{t} \le -1 \Rightarrow f_X(-\sqrt{t}) = 0 \quad \Rightarrow g_Y(t) = 0$

$$t \in (0,1) \quad g_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\sqrt{t} + \sqrt{t}\right) = 1$$

$$g_Y(t) = \mathbb{1}_{(0,1)}(t)$$

Ex 3, FOGLIO 4

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x f_X(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} x f_X(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} x (1-b) b^n \, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (1-b) b^n \frac{x^2}{2} \Big|_{x=n}^{x=n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-b) \frac{b^n}{2} (2n+1)$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} (1-b) b^n x^2 \, dx$$