INTEGRAZIONE E DISTRIBUZIONE

Titolo nota 12/10/2015

PROPRIETÀ (no dim) $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di misura e

$X: \Omega \to \mathbb{R}_+$ funzione $\mathcal{E}$-misurabile nonnegativa, allora $\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = 0$ SSE $X = 0$ $\mathbb{P}$-q.o.

TEOREMA DI CONVERGENZA DOMINATA DI LEBESGUE NO DIM

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di misura.

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni $\mathcal{E}$-misurabili e supponiamo che $\exists\, \Omega_0 \subset \Omega$ t.c. $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ e t.c.

1) $\forall \omega \in \Omega_0$ $\exists \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) =: X(\omega)$

2) $\exists f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathbb{P}$-sommabile e t.c. $\forall \omega \in \Omega_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|X_n(\omega)| \le f(\omega)$

__Allora__ $\int_\Omega |X_n(\omega) - X(\omega)|\mathbb{P}(d\omega) \longrightarrow 0$ per $n\to\infty$

$$\int_\Omega X_n(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \longrightarrow \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \quad \text{per } n\to\infty$$

— o —

Se $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ è uno spazio di probabilità

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega)}\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

e dunque l'integrale si dice anche VALORE ATTESO, SPERANZA MATEMATICA di X e si indica $\mathbb{E}[X]$.

— o —

In particolare se ho $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ sp. probabilizzato e $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a., allora è ben definito lo spazio di probabilità $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile rispetto a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, f si dice FUNZIONE DI BOREL (o boreliana)

$\Rightarrow$ per ogni funzione di Borel nonnegativa è ben definito $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathbb{P}_X(dt)$

Sia X v.a. a valori in $\mathbb{R}$ su uno spazio $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$: $X: \Omega \to \mathbb{R}$

e sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione di Borel

Considero $Y := f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$

Facciamo vedere che Y è una v.a.

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad \{Y \in A\} = Y^{-1}(A)$

$Y(\omega) = f(X(\omega)) \Rightarrow Y(\omega) \in A$ SSE

$X(\omega) \in f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\{Y \in A\} = \{X \in f^{-1}(A)\} \in \mathcal{E}$

TEOREMA Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ e sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ funzione di Borel nonnegativa.

Allora

$$\mathbb{E}[f \circ X] = \int_{\Omega} f(X(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathbb{P}_X(dt)$$

DIM 1° caso f funzione semplice nonnegativa

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}(t) \qquad E_i = \{t \in \mathbb{R} : f(t) = c_i\}$$

$$0 \le c_1 < c_2 < \dots c_n$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E_i\} = \{\omega \in \Omega : (f \circ X)(\omega) = c_i\}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathbb{P}_X(dt) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}_X(E_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}(X \in E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}(f \circ X = c_i) = \int_{\Omega} (f \circ X)(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$$

2° caso f funzione di Borel nonnegativa

Per il lemma di campionamento so che esiste $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione di funzioni semplici nonnegative che approssima f dal basso:

$$0 \le f_k(t) \le f_{k+1}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{n \to \infty} f_k(t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_\Omega (f_k \circ X)(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} f_k(t)\, \mathbb{P}_X(dt)$$

per Beppo Levi applicato a $f_k \circ X$ $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ per Beppo-Levi

$$\int_\Omega (f \circ X)(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) \qquad \int_\mathbb{R} f(t)\, \mathbb{P}_X(dt)$$

e dunque $\mathbb{E}[f \circ X] = \int_\mathbb{R} f(t)\, \mathbb{P}_X(dt)$

COROLLARIO Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Allora $\mathbb{E}[X]$ esiste sse $\exists \int_\mathbb{R} t\, \mathbb{P}_X(dt)$

e in questo caso
$$\mathbb{E}[X] = \int_\mathbb{R} t\, \mathbb{P}_X(dt).$$

In particolare $\mathbb{E}[X]$ esiste ed è finito sse
$$\int_\mathbb{R} |t|\, \mathbb{P}_X(dt) \text{ è finito}$$

Considero $f(t) = \max\{t, 0\} \Rightarrow f \circ X = X^+$

$$\int_\Omega X^+(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} \max\{t, 0\}\, \mathbb{P}_X(dt) =$$
$$= \int_\mathbb{R} t\, \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)\, \mathbb{P}_X(dt)$$

Applico il Teorema con $f(t) = \max\{-t, 0\}$

$\Rightarrow f_0 X = X^-$

$$\int_\Omega X^-(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} \max\{-t, 0\}\,\mathbb{P}_X(dt)$$

$$= \int_\mathbb{R} -t\,\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(t)\,\mathbb{P}_X(dt)$$

$$\int_\Omega X^+(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} t\,\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)\,\mathbb{P}_X(dt)$$

$$\int_\Omega X^-(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} -t\,\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(t)\,\mathbb{P}_X(dt)$$

Se almeno uno degli integrali è finito posso calcolare

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X^+(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega X^-(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \int_\mathbb{R} t\,\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)\,\mathbb{P}_X(dt) - \int_\mathbb{R} -t\,\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(t)\,\mathbb{P}_X(dt) =$$

$$= \int_\mathbb{R} t\left(\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t) + \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(t)\right)\mathbb{P}_X(dt)$$

$$= \int_\mathbb{R} t\,\mathbb{P}_X(dt)$$

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_\mathbb{R} \underbrace{t\,\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)}\,\mathbb{P}_X(dt) + \int_\mathbb{R} \underbrace{-t\,\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(t)}\,\mathbb{P}_X(dt)$$

$$= \int_\mathbb{R} |t|\,\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)\,\mathbb{P}_X(dt) + \int_\mathbb{R} |t|\,\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(t)\,\mathbb{P}_X(dt)$$

$$= \int_\mathbb{R} |t|\,\mathbb{P}_X(dt)$$

V.A DISCRETE

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discreta

$X(\Omega) = \{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ immagine di X

$E_j = \{X = t_j\}$ $\Rightarrow$ gli $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sono una partizione di Ω in eventi.

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j \mathbb{1}_{E_j}(\omega)$$

$$p_j := \mathbb{P}(X = t_j) = \mathbb{P}(E_j) = \mathbb{P}_X(\{t_j\})$$

1° CASO $t_j \geq 0$ $\forall j \in \mathbb{N}$

$$f_k(\omega) = \sum_{j=1}^{k} t_j \mathbb{1}_{E_j}(\omega)$$

$t_j \geq 0$ $\Rightarrow$ $0 \leq f_k(\omega) \leq f_{k+1}(\omega) \leq X(\omega)$

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[f_k] \underset{\lim_{k\to\infty}}{=} \sum_{j=1}^{k} t_j \mathbb{P}(E_j) \underset{\lim_{k\to\infty}}{=} \sum_{j=1}^{k} t_j p_j \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} t_j p_j$$

2) t_j di segno variabile

$\omega \in E_j$ $X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\} = \max\{t_j, 0\}$

$\Rightarrow$ $\forall \omega \in \Omega$ $X^+(\omega) = \sum_{j: t_j \geq 0} t_j \mathbb{1}_{E_j}(\omega)$

$\omega \in E_j$ $X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\} = \max\{-t_j, 0\}$

$\Rightarrow$ $\forall \omega \in \Omega$ $X^-(\omega) = \sum_{j: t_j < 0} -t_j \mathbb{1}_{E_j}(\omega)$

$$|X(\omega)| = \sum_{j\in\mathbb{N}} |t_j| \mathbb{1}_{E_j}(\omega)$$

$$\mathbb{E}[|X|] = \sum_{j=1}^{\infty} |t_j| p_j$$

$$\mathbb{E}[X^+] = \sum_{j: t_j \geq 0} t_j p_j \qquad \mathbb{E}[X^-] = \sum_{j: t_j < 0} -t_j p_j$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j: t_j \geq 0} t_j p_j + \sum_{j: t_j < 0} t_j p_j = \sum_{j=1}^{\infty} t_j p_j$$

perché $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$

ESERCIZIO $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funzione di Borel nonnegative

X v.a. discreta con $\mathbb{P}(X=t_j)=p_j$

$X(\Omega)=\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$

Sia $Y=f\circ X$

Dimostrare che $\mathbb{E}[Y]=\sum_{j=1}^{\infty} f(t_j)\,p_j$

— o —

V.A. CON DISTRIBUZIONE A.C.

Voglio far vedere che $\forall f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di Borel e nonnegative

$$\mathbb{E}[f\circ X]=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathbb{P}_X(dt)=\int_{\mathbb{R}} f(t)f_X(t)\underbrace{dt}$$

integrale rispetto alla misura di Lebesgue

e f_X è la densità di X

1° CASO f semplice nonnegative

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbb{1}_{E_i}(t) \qquad E_i=\{t\in\mathbb{R}: f(t)=c_i\}$$

$$0\le c_1<c_2<\dots c_n$$

$$\mathbb{E}[f\circ X]=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathbb{P}_X(dt)=\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbb{P}_X(E_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} c_i\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,\mathbb{1}_{E_i}(t)\,dt=$$

$$=\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbb{1}_{E_i}(t)}_{=f(t)}dt=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,f_X(t)\,dt$$

2° CASO f funzione di Borel nonnegativa

Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni semplici nonnegative che approssima f dal basso

$$0\le f_k(t)\le f_{k+1}(t)\le f(t) \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(t)=f(t) \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(t)\,\mathbb{P}_X(dt)=\int_{\mathbb{R}} f_k(t)f_X(t)\,dt$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathbb{P}_X(dt)$$

Poiché $f_X(t) \geq 0$, $g_k(t) := f_k(t) f_X(t)$ approssima $f(t) f_X(t)$ dal basso

$\Rightarrow$ Per Beppo-Levi $\int_{\mathbb{R}} f_k(t) f_X(t)\,dt \to \int_{\mathbb{R}} f(t) f_X(t)\,dt$

$\Rightarrow$ Per l'unicità del limite $\int_{\mathbb{R}} f(t) \mathbb{P}_X(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(t) f_X(t)\,dt$

COROLLARIO Se X è una v.a. con distribuzione assolutamente continua e densità f_X, allora $\mathbb{E}[X]$ esiste se e solo se $\exists \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)\,dt$ e in tal caso

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)\,dt$$

In particolare $\mathbb{E}[X]$ esiste finito SSE

$$\int_{\mathbb{R}} |t| f_X(t)\,dt \text{ è finito}$$

DIM per esercizio

FORMULA DI COMPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e siano

1. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.,
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione di Borel
3. $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ funzione di Borel nonnegativa

Allora

$$\int_{\mathbb{R}} (\psi \circ f)(t) \mathbb{P}_X(dt) = \int_{\mathbb{R}} \psi(s) \mathbb{P}_{f \circ X}(ds)$$

DIM Considero la v.a. $Y = f \circ X \Rightarrow \psi \circ f \circ X = \psi \circ Y$

Abbiamo dimostrato che

$$\mathbb{E}[\psi \circ Y] = \int_{\mathbb{R}} \psi(s) \mathbb{P}_Y(ds) = \int_{\mathbb{R}} \psi(s) \mathbb{P}_{f \circ X}(ds)$$

$$\psi \circ Y = \psi \circ f \circ X = (\psi \circ f) \circ X$$

$$\mathbb{E}\left[(\psi\circ\varphi)\circ X\right] = \int_{\mathbb{R}} (\psi\circ\varphi)(t)\,\mathbb{P}_X(dt)$$

FORMULA DI CAVALIERI

LEMMA Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di misura, sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ funzione $\mathcal{E}$-misurabile nonnegativa

Allora

$$\int_{\mathbb{R}} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,dt$$

Applicando questa formula al caso $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità e X v.a. nonnegativa, trovo

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\,dt$$

$$X^+ = \max\{X, 0\} \qquad X^- = \max\{-X, 0\}$$

$$\mathbb{E}[X^+] = \int_0^{+\infty} (1 - F_{X^+}(t))\,dt$$

$$\mathbb{E}[X^-] = \int_0^{+\infty} (1 - F_{X^-}(t))\,dt$$

Se $t > 0$

$$F_{X^+}(t) = \mathbb{P}(\max\{X, 0\} \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t)$$

$$F_{X^-}(t) = \mathbb{P}(\max\{-X, 0\} \leq t) = \mathbb{P}(-X \leq t) = \mathbb{P}(X \geq -t)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X < -t) = 1 - \left(\mathbb{P}(X \leq -t) - \mathbb{P}(X = -t)\right)$$

$$\mathbb{E}[X^+] = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\,dt$$

$$\mathbb{E}[X^-] = \int_0^{+\infty} (1 - F_{X^-}(t))\,dt =$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(F_X(-t) - \mathbb{P}(X = -t)\right)dt$$

$\mathbb{P}(X = -t) \neq 0$ al più su un insieme numerabile di punti

$g(t) := \mathbb{P}(X = -t)$ è uguale a 0 quasi-ovunque rispetto alla misura di Borel

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X = -t)\,dt = 0$$

$$\mathbb{E}[X^-] = \int_0^{+\infty} F_X(-t)\,dt \qquad s = -t$$

$$= \int_{-\infty}^{0} F_X(s)\,ds$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-] = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\,dt - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)\,dt$$

VARIANZA e SCARTO QUADRATICO MEDIO

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. con valore atteso finito

$$Y := (X - \mathbb{E}[X])^2$$

Chiamo VARIANZA di X il valore atteso di Y:

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$