DISTRIBUZIONI e INTEGRAZIONE

Titolo nota 09/10/2015

Sia X v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad X^{-1}(A) = \{X \in A\} \in \mathcal{E}$

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X \in A)$

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$$

$(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ è una misura:

$\{X \in \emptyset\} = \emptyset \qquad \mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$

$X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i) \qquad X^{-1}(A_i) \cap X^{-1}(A_j) = \emptyset$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_X(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(A_i)) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i)\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\mathbb{P}_X$ è una misura di probabilità sse $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$

cioè sse $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$ sse $\mathbb{P}(X \in \{+\infty, -\infty\}) = 0$

$(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ si chiama DISTRIBUZIONE DELLA v.a. X

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, t]) + \mathbb{P}(X = -\infty)$$
$$= \mathbb{P}_X((-\infty, t]) + \underbrace{\mathbb{P}(X = -\infty)}_{=0 \text{ in futuro}}$$

$$\mathbb{P}_X((a,b]) = \mathbb{P}(X \in (a,b]) =$$
$$= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)$$
$$= F_X(b) - F_X(a)$$

X v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ a valori in $\mathbb{R}$

$\mathcal{A} := \{ X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \} \subseteq \mathcal{E}$

PROPRIETÀ $\mathcal{A}$ è una σ-algebra. (σ-algebra degli eventi rilevati da X)

DIM $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

$$\Omega \setminus X^{-1}(A) = X^{-1}(\mathbb{R} \setminus A)$$

$$\mathcal{A} \ni X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i)$$

ESEMPIO X v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con immagine finita o numerabile

$$X(\Omega) = \{c_i\}_{i \in \mathcal{I}} \qquad \mathcal{I} = \{1, \ldots, n\} \text{ o } \mathbb{N}$$

$$E_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = c_i\} \qquad \forall i \in \mathcal{I}$$

$\{E_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ è una partizione di Ω in eventi perché

$$\{X = c_i\} = \{X \leq c_i\} \setminus \{X < c_i\} \in \mathcal{E}$$

— o —

V.A. DISCRETE

Sono le v.a. con immagine finita o numerabile

$$X(\Omega) = \{t_j\}_{j \in \mathcal{I}} \qquad \mathcal{I} = \{1, \ldots, n\} \text{ o } \mathcal{I} = \mathbb{N}$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{t_j \in A} \{X = t_j\}\right) = (*)$$

$$\{X \in A\} = \bigcup_{t_j \in A} \{X = t_j\}$$ unione di insiemi disgiunti due a due

$$(*) = \sum_{t_j \in A} \mathbb{P}(X = t_j) = \sum_{t_j \in A} \mathbb{P}_X(\{t_j\})$$

$p_j := \mathbb{P}_X(\{t_j\})$ densità di X in t_j

$\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$ $\qquad (p_1, \ldots, p_n)$

$\mathcal{I} = \mathbb{N}$ $\qquad \{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{t_j \in A} p_j \qquad \mathbb{P}_X(\cdot) = \sum_{j \in \mathcal{I}} p_j \, \delta_{t_j}(\cdot)$$

$t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}_X((-\infty, t]) =$

$$= \sum_{t_j \le t} p_j$$

$$F_X(t) - \lim_{s \to t^-} F_X(s) = \sum_{t_j \le t} p_j - \lim_{s \to t^-} \sum_{t_j \le s} p_j$$

$$= \sum_{t_j \le t} p_j - \sum_{t_j < t} p_j \neq 0$$

SSE $\exists k \in J : t = t_k \quad p_k \neq 0$

V.A. CON DISTRIBUZIONE A.C.

Sono le v.a. t.c.

$\exists f_X : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ Lebesgue-misurabile

t.c.

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mathbb{P}_X(A) = \int_A f_X(t)\,dt$$

$(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ è una probabilità SSE $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dt = 1$

In questo caso

$$F_X(t) = \int_{(-\infty, t]} f_X(s)\,ds = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO Sia X v.a. di legge F_X

Calcolare la legge di $Y = X^2$

DIM $t \in \mathbb{R} \quad \{Y \le t\} = \{X^2 \le t\} =$

$$= \begin{cases} \emptyset & t < 0 \\ \{X = 0\} & t = 0 \\ \{-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}\} & t > 0 \end{cases}$$ sono eventi

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mathbb{P}(X = 0) & t = 0 \\ \mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) & t > 0 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) + \mathbb{P}(X = -\sqrt{t})$

— · —

ESERCIZIO $\quad X$ v.a di legge F_X

$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a \neq 0$ $\quad Y := aX + b$

Verificare che Y è una v.a. e determinarne la legge in termini di F_X.

INTEGRALE RISPETTO A UNA MISURA

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di misura.

Una funzione $X: \Omega \to \mathbb{R}$ si dice FUNZIONE SEMPLICE se è combinazione lineare di funzioni caratteristiche di un numero finito di eventi a due a due disgiunti

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}(\omega) \left(+ 0 \cdot \mathbb{1}_{(\cup E_i)^c}(\omega) \right)$$

$c_1 - c_n \in \mathbb{R}$

$E_1 - E_n \in \mathcal{E}$ $\quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad i \neq j$

Posso sempre supporre che gli $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ siano una partizione di Ω.

Abbiamo visto prima che ogni funzione semplice è una v.a.

Sia X funzione semplice nonnegativa

$$0 \leq c_1 < c_2 \ldots < c_n \qquad X = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{E_i}$$

Chiamo INTEGRALE di X RISPETTO ALLA MISURA $\mathbb{P}$ il valore

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}(E_i) \quad . \text{ Lo indico } \int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

dove facciamo la convenzione $c_i \mathbb{P}(E_i) = 0$ se

$$c_i = 0 \quad e \quad \mathbb{P}(E_i) = +\infty$$

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = +\infty \quad \text{sse} \quad \exists i \text{ t.c. } \begin{array}{l} c_i > 0 \\ \mathbb{P}(E_i) = +\infty \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega)} \sum c_i \mathbb{P}(E_i)$$

OSSERVAZIONE Se X e Y sono due funzioni semplici nonnegative, $a, b \in \mathbb{R}$ $a, b \geq 0$, allora la funzione

$$Z = aX + bY$$

è una funzione semplice nonnegativa e

$$\int_\Omega Z(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = a\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) + b\int_\Omega Y(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

DIM $\quad X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{E_i} \qquad Y = \sum_{j=1}^m d_j \mathbb{1}_{F_j}$

dove $\{E_i\}_{i=1}^n$ e $\{F_j\}_{j=1}^m$ sono partizioni di Ω in eventi

$\forall \omega \in \Omega \quad \exists! (i,j)$ t.c. $\omega \in E_i \cap F_j$

$\Rightarrow Z(\omega) = ac_i + bd_j$

$$Z(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (ac_i + bd_j)\, \mathbb{1}_{E_i \cap F_j}(\omega)$$

$$\int_\Omega Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (ac_i + bd_j)\,\mathbb{P}(E_i \cap F_j) =$$

$$= a\sum_i \sum_j c_i \mathbb{P}(E_i \cap F_j) + b \sum_i \sum_j d_j \mathbb{P}(E_i \cap F_j)$$

$$= a\sum_i c_i \underbrace{\sum_j \mathbb{P}(E_i \cap F_j)}_{\mathbb{P}(E_i)} + b\sum_j d_j \underbrace{\sum_i \mathbb{P}(E_i \cap F_j)}_{\mathbb{P}(F_j)}$$

$$= a\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) + b\int_\Omega Y(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

OSSERVAZIONE Se X e Y sono due funzioni semplici nonnegative t.c. $X(\omega) \le Y(\omega) \ \forall \omega \in \Omega$ allora

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \le \int_\Omega Y(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

DIM $\quad X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{E_i} \qquad Y = \sum_{j=1}^m d_j F_j$

Se $E_i \cap F_j \neq \emptyset \quad \forall \omega \in E_i \cap F_j \quad X(\omega) = c_i$
$Y(\omega) = d_j$

$\Rightarrow$ se $E_i \cap F_j \neq \emptyset$ deve essere $c_i \le d_j$

$$\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(E_i \cap F_j)$$

$$\int_\Omega Y(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{j=1}^{m} d_j\,\mathbb{P}(F_j) = \sum_{j=1}^{m} d_j \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i \cap F_j)$$

$$\int_\Omega Y(\omega)\mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_j\,\mathbb{P}(E_i\cap F_j) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i\,\mathbb{P}(E_i\cap F_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (d_j - c_i)\,\mathbb{P}(E_i\cap F_j) \geq 0$$

— o —

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di misura e sia

$X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ funzione $\mathcal{E}$-misurabile

$$\sup \left\{ \int_\Omega \varphi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) : \varphi : \Omega \to \mathbb{R} \text{ funzioni semplici non negative t.c. } \varphi(\omega) \leq X(\omega)\ \forall \omega \in \Omega \right\}$$

Il valore che ottengo (eventualmente $= +\infty$) si chiama INTEGRALE DI X RISPETTO A $\mathbb{P}$

e si indica $\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$

LEMMA DI CAMPIONAMENTO

Sia $(\Omega, \mathcal{E})$ spazio misurabile e sia

$X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$

Allora X è una funzione $\mathcal{E}$-misurabile

SSE $\exists \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione monotona crescente di funzioni semplici nonnegative t.c.

$\forall \omega \in \Omega$: $\varphi_k(\omega) \leq \varphi_{k+1}(\omega)$

$\varphi_k(\omega) \leq X(\omega)$

$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\omega) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k(\omega) = X(\omega)$

(NO DIM)

LEMMA DI BEPPO-LEVI

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di misura e sia $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di funzioni $\mathcal{E}$-misurabili nonnegative.

Sia $X(\omega) := \lim_{k \to \infty} X_k(\omega) = \sup_{k \in \mathbb{N}} X_k(\omega)$

Allora anche X è $\mathcal{E}$-misurabile e

$$\int_\Omega X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega X_k(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$$

(NO DIM)

— o —

Sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ funzione $\mathcal{E}$-misurabile

Considero

$$X^+(\omega) := \max\{X(\omega), 0\}$$
$$X^-(\omega) := \max\{-X(\omega), 0\}$$

Si dimostra che X^+ e X^- sono entrambe $\mathcal{E}$-misurabili:

Sia $t \in \mathbb{R}$ $\quad \{X^+ \leq t\} = \begin{cases} \phi & t < 0 \\ \{X \leq t\} & t \geq 0 \end{cases} \in \mathcal{E}$

$$\{X^- \leq t\} = \begin{cases} \phi & t < 0 \\ \{-X \leq t\} & t \geq 0 \end{cases} = $$

$$= \begin{cases} \phi & t < 0 \\ \{X \geq -t\} & t \geq 0 \end{cases} \in \mathcal{E}$$

Si dimostra anche che $\quad X = X^+ - X^-$

$$|X| = X^+ + X^-$$

DIM Sia $\omega \in \Omega$: se $X(\omega) \geq 0$ $\quad X^+(\omega) = X(\omega)$

$$X^-(\omega) = 0$$

Se $X(\omega) < 0$ $\quad X^+(\omega) = 0$

$$X^-(\omega) = -X(\omega)$$

Definisco $\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) := \int_\Omega X^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega) - \int_\Omega X^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$

purché almeno uno tra $\int_\Omega X^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ e $\int_\Omega X^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ sia finito.

Se questo succede la funzione X si dice INTEGRABILE RISPETTO ALLA MISURA $\mathbb{P}$.

Se sia $\int_\Omega X^+(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ che $\int_\Omega X^-(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ sono finiti, allora la funzione X si dice SOMMABILE.

Si dimostra (NO DIM) che X è sommabile SSE $\int_\Omega |X(\omega)|\mathbb{P}(d\omega)$ è finito