VARIABILI ALEATORIE

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato (o di misura)

$X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$

Se $\forall t \in \mathbb{R}$ $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\} \in \mathcal{E}$

dico che X è una variabile aleatoria (v.a.)

(o che X è una funzione $\mathcal{E}$-misurabile).

ESEMPIO $E \in \mathcal{E}$ $X = \mathbb{1}_E$ $\{\emptyset, E, E^c, \Omega\}$

$X = \text{costante} = C$

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\} = \{X \le t\} = \begin{cases} \emptyset & t < C \\ \Omega & t \geq C \end{cases}$ $\{\emptyset, \Omega\}$

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}$

PROPOSIZIONE Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato (o di misura)

e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

Allora sono fatti equivalenti

1) X è una v.a.

2) $\{X < t\} \in \mathcal{E}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

3) $\{X \geq t\} \in \mathcal{E}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

4) $\{X > t\} \in \mathcal{E}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

DIM $1 \Rightarrow 2$ $\{X < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{X \le t - \frac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{E} \ \forall n} \in \mathcal{E}$

$2 \Rightarrow 3$ $\{X \geq t\} = \{X < t\}^c \in \mathcal{E}$

$3 \Rightarrow 4$ $\{X > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{X \geq t + \frac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{E} \ \forall n} \in \mathcal{E}$

$4 \Rightarrow 1$ $\{X \le t\} = \{X > t\}^c \in \mathcal{E}$

OSSERVAZIONE È sufficiente che $\{X \le t\} \in \mathcal{E}$

$\forall t \in T$ sottoinsieme denso e numerabile di $\mathbb{R}$.

$(a,b] \subset \mathbb{R}$ $\qquad \{X \in (a,b]\} =$

$\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\} \in \mathcal{E}$

$$\{X \in (a,b]\} = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\} =$$

$$= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq b\} \setminus \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} .$$

$$\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}$$

PROPOSIZIONE Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato (o di misura) e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

Allora sono fatti equivalenti:

1) X è una variabile aleatoria

2) $\{X \in A\} = X^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ $\quad \forall A$ aperto di $\mathbb{R}$

$\{X = +\infty\}$ e $\{X = -\infty\} \in \mathcal{E}$

DIM $2 \Rightarrow 1$ $\qquad \{X < t\} = \{X = -\infty\} \cup \{X \in (-\infty, t)\}$

$1 \Rightarrow 2$ $\quad$ Se A è aperto, allora $\exists \{(a_i, b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ famiglia di intervalli a due a due disgiunti

t.c. $\quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$

$\Rightarrow \{X \in A\} = \{X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{X \in (a_i, b_i]\}$

è un evento perché unione numerabile di eventi

$$\{X = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{X \leq -n\}}_{\in \mathcal{E}} \in \mathcal{E}$$

$$\{X = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{X \geq n\}}_{\in \mathcal{E}} \in \mathcal{E}$$

PROPOSIZIONE Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato (o di misura) e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una variabile aleatoria.

Sia

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} : X^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}$$

Allora $\mathcal{F}$ è una σ-algebra di $\mathbb{R}$ che contiene $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

DIM Basta dimostrare che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra.

Sia $A \in \mathcal{F}$ $\qquad$ Considero $A^c = \mathbb{R} \setminus A$

$$A^c = (\overline{\mathbb{R}} \setminus A) \setminus \{+\infty, -\infty\}$$

$$X^{-1}(A^c) = \underbrace{X^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus A)}_{X^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) \setminus X^{-1}(A)} \setminus \underbrace{X^{-1}(\{+\infty, -\infty\})}_{X^{-1}(\{+\infty\}) \cup X^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{E}} \in \mathcal{E}$$

$X^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{E}$, $X^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{E}$

$$X^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) \setminus X^{-1}(A) = \Omega \setminus X^{-1}(A) = (X^{-1}(A))^c \in \mathcal{E}$$

Sia $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $X^{-1}(A_i) \in \mathcal{E}$

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{X^{-1}(A_i)}_{\in \mathcal{E}} \in \mathcal{E}$$

COROLLARIO Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato (o di misura) e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.

Sono fatti equivalenti:

1) X è una variabile aleatoria (funzione $\mathcal{E}$-misurabile)
2) $X^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(+\infty), X^{-1}(-\infty) \in \mathcal{E}$

LEGGE DI UNA V.A.

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ variabile aleatoria

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\{X \leq t\} \in \mathcal{E}$ $\Rightarrow$ posso calcolare $\mathbb{P}(X \leq t)$

(in notazione estesa $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$)

E' ben definita una funzione

$$F_X : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(X \leq t) \in [0,1]$$

F_X è detta LEGGE di X

- FUNZIONE DI RIPARTIZIONE di X
- FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA di X

PROPRIETÀ Sia F_X legge di una variabile aleatoria X su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Allora:

1) F_X è monotona crescente

DIM $s, t \in \mathbb{R}$ $s < t$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq s\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}$$
$$\{X \leq s\} \subseteq \{X \leq t\}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \leq s) \leq \mathbb{P}(X \leq t)$$
$$F_X(s) \leq F_X(t)$$

2) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = \mathbb{P}(X = -\infty)$

DIM Considero $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ successione decrescente e t.c. $\lim_{n \to \infty} t_n = -\infty$ $(t_n \searrow -\infty)$

$\{X \leq t_n\}$

$t_n \leq t_{n-1}$ $\{X \leq t_n\} \subseteq \{X \leq t_{n-1}\}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq t_n\} = \{X = -\infty\}$$

Per la continuità della misura

$$\mathbb{P}(X = -\infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq t_n\}\right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X \leq t_n) = \lim_{n \to \infty} F_X(t_n)$$

$\lim_{n \to \infty} F_X(t_n) = \mathbb{P}(X = -\infty)$ $\forall \{t_n\}$ $t_n \searrow -\infty$

Per il lemma di collegamento

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = \mathbb{P}(X = -\infty)$$

(3) $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$

DIM Considero una successione crescente $\{t_n\}$ che diverge a $+\infty$ $(t_n \nearrow +\infty)$

$t_n > t_{n-1}$ $\{X \leq t_n\} \supseteq \{X \leq t_{n-1}\}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq t_n\} = \Omega \setminus \{X = +\infty\}$$

$$\mathbb{P}(\Omega \setminus \{X = +\infty\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq t_n\}\right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X \leq t_n) = \lim_{n \to \infty} F_X(t_n)$$

$=$

$1 - \mathbb{P}(X = +\infty) = \lim_{n \to \infty} F_X(t_n)$ $\forall \{t_n\}$ $t_n \nearrow +\infty$

Per il lemma di collegamento

$$\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty)$$

(4) $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{s \to t^+} F_X(s) = F_X(t)$

DIM Sia $\{s_n\}$ successione decrescente che converge a t; $\lim_{n\to\infty} s_n = t \quad s_n \searrow t$

$s_n \leq s_{n-1} \qquad \{X \leq s_n\} \subseteq \{X \leq s_{n-1}\}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq s_n\} \underset{\supseteq}{\subseteq} \{X \leq t\}$$

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq s_n\}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq s_n)$$

$$F_X(t) = \lim_{n\to\infty} F_X(s_n) \qquad \forall \{s_n\} \; s_n \searrow t$$

Per il lemma di collegamento

$$F_X(t) = \lim_{s \to t^+} F_X(s)$$

(5) $\lim_{s \to t^-} F_X(s) = F_X(t) - \mathbb{P}(X = t) = \mathbb{P}(X < t)$

DIM $\{s_n\}$ successione monotone crescente $\lim_{n\to\infty} s_n = t \qquad s_n \nearrow t$

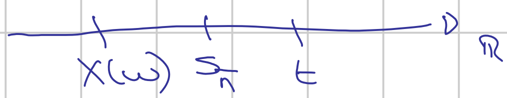
$s_n \geq s_{n-1} \qquad \{X \leq s_n\} \supseteq \{X \leq s_{n-1}\}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq s_n\} = \{X < t\}$$

$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq s_n\} \quad \exists \bar{n} \;\; X(\omega) \leq s_{\bar{n}} < t$

$\Rightarrow \omega \in \{X < t\}$

$\omega : X(\omega) < t$



$\exists \bar{n} : X(\omega) \leq s_{\bar{n}} \Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq s_n\}$

$$\mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq s_n\}\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq s_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(s_n)$$

$$\mathbb{P}(X<t) = \lim_{n\to\infty} F_X(s_n) \quad \forall \{s_n\} \ s_n \nearrow t$$

Per il lemma di collegamento

$$\mathbb{P}(X<t) = \lim_{s\to t^-} F_X(s)$$

— o —

- $\lim_{s\to t^+} F_X(s) = F_X(t)$

$$\lim_{s\to t^-} F_X(s) = F_X(t) - \mathbb{P}(X=t)$$

- F monotona crescente

In ogni punto t di discontinuità il salto è ampio $\mathbb{P}(X=t)$

Poiché ogni funzione monotona ha al più una infinità numerabile di salti, concludo che esiste al più una infinità numerabile di $t\in\mathbb{R}$ t.c. $X^{-1}(\{t\})$ è un evento di probabilità positiva

ESEMPIO Lancio una moneta truccata (esce Testa con probabilità p) e la lancio n volte

Sia X la v.a. che conta il numero di successi.

$$\Omega = \{0,1\}^n \qquad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^k(1-p)^{n-k}$ dove k è il numero di successi cioè il numero di componenti di ω uguali ad 1.

$\omega = (\omega_1 \ldots \omega_n)$

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$$

$t\in\mathbb{R} \qquad F_X(t) = \mathbb{P}(X\le t)$

$t<0 \qquad F_X(t) = 0$

$t\ge n \qquad F_X(t) = 1$

$\forall k = \{0,\ldots,n\} \qquad \forall t\in[k,k+1)$

$$F_X(t) = \sum_{\substack{j\in\{0,\dots,n\} \\ j\leq k}} \mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

$$\forall t \in [0,n) \quad F_X(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$