Esercizi 6 - Variabili aleatorie, distribuzione e integrazione

Esercizio 1. Siano a e b parametri reali positivi. Provare che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\pi b \left(1 + \left(\dfrac{x-a}{b} \right)^2 \right)} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

è una densità di probabilità. La distribuzione associata è detta *distribuzione di Cauchy di parametri a e b, $C(a,b)$*. Provare che se X è una v.a. con distribuzione $C(a,b)$, allora il valore atteso di X non è definito.

Esercizio 2. Provare che la funzione

$$f(x) = \frac{\exp\left(-|x|\right)}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

è una densità di probabilità. La distribuzione ad essa associata si dice *distribuzione di Laplace*. Calcolare valore atteso e varianza di una v.a. X avente tale distribuzione. Calcolare la distribuzione della v.a. $Y := \dfrac{X - \mathbb{E}[X]}{\mathrm{Var}\,[\,X\,]}$.

Esercizio 3. Sia X una v.a. con legge esponenziale di parametro λ e sia $b > 0$. Calcolare la legge ed il il valore atteso di X^b.

Usare il risultato precedente per provare che per α e λ parametri reali positivi la funzione

$$f(x) = \alpha \lambda x^{\alpha - 1} \exp\left(-\lambda x^{\alpha}\right) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

è una densità di probabilità. La distribuzione ad essa associata si dice *distribuzione di Weibull*.

Calcolare il valore atteso di una v.a. avente distribuzione di Weibull.

Esercizio 4. Un'urna contiene b palline bianche e r palline rosse. Sia $n \leq b+r$. Si fanno n estrazioni successive senza reimbussolamento. Calcolare la probabilità che l'n-esima estratta sia bianca.
Suggerimento: usare l'identità $\sum_{j=0}^{k} \binom{k+r-m}{k-j} \binom{m}{j} = \binom{r+k}{k}$.