PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Titolo nota 05/10/2015

$\Omega = \{0,1\}^4$ $\quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ prob. uniforme

Calcolare la probabilità d'ottenere 2 T e 2 C in un lancio di monete

$A = \{\omega \in \Omega : 2$ componenti uguali a 0 e 2 componenti uguali a $1\}$

$$\mathbb{P}(A) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{2^4} = \frac{3}{8}$$

$B = \{1\} \times \{0,1\}^3$

Se so già che al primo lancio esce Testa, allora A si verifica sse si verifica $A \cap B$.

Se considero in B i lanci favorevoli questi sono $\binom{3}{1}$ e ognuno di questi ha probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$$

Se $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ è uno spazio probabilizzato $A, B \in \mathcal{E}$ con $\mathbb{P}(B) > 0$ chiamo PROBABILITÀ DI A DATO B e indico $\mathbb{P}(A|B)$ il rapporto $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Osservazione $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$ sse

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \quad \text{sse}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Def Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato
Due eventi A e B si dicono INDIPENDENTI se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $\{D_i\}_{i \in J}$ una famiglia finita o numerabile di eventi t.c. $\mathbb{P}(D_i) > 0 \ \forall i \in J$, la famiglia è una partizione di Ω.
Allora $\forall A \in \mathcal{E}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A|D_i)\mathbb{P}(D_i)$$

DIM Abbiamo già visto che $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A \cap D_i)$
Ma $\mathbb{P}(D_i) > 0 \implies \mathbb{P}(A|D_i) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap D_i)}{\mathbb{P}(D_i)} \implies$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A|D_i)\mathbb{P}(D_i)$$

N.B Se B è un evento quasi impossibile $\implies$ so che $\forall A \in \mathcal{E}$ anche $A \cap B$ è quasi impossibile $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$
Si pone per definizione $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{E}$

Se $A, B \in \mathcal{E} \quad \mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$$

$A, B, C \in \mathcal{E} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) > 0$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C|A \cap B)\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(C|A \cap B)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

$\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{E} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\mathbb{P}\left(A_{n-1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right)\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\mathbb{P}\left(A_{n-1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) \cdots \cdots \mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_1)$$

FORMULA DI BAYES

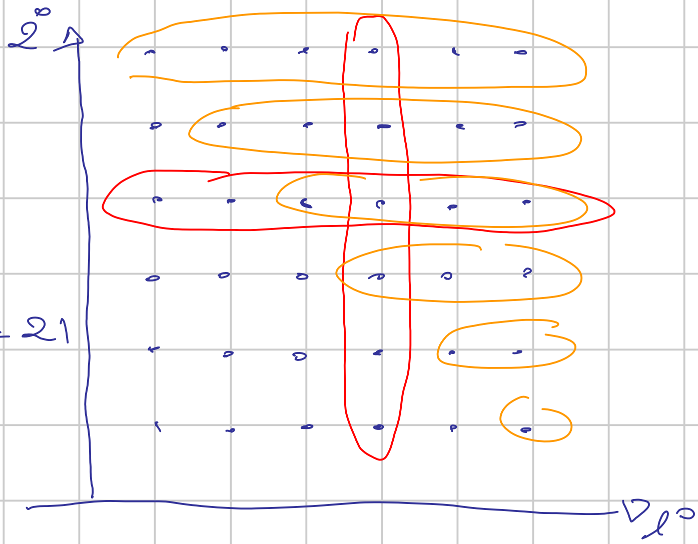
Siano A, B e E $\quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap B^c)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}$$

Esercizio Lancio 2 dadi non truccati.
Calcolare la probabilità che la somma dei valori sia ≥ 7

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$



A = casi favorevoli

$\#A = 1 + \dots + 6 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$

$\mathbb{P}(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

Sapendo che su almeno un dado ho ottenuto 4, qual è la probabilità di ottenere somma ≥ 7

B = ho ottenuto 4 su almeno un dado

$\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36} \qquad \mathbb{P}(A\cap B) = \frac{7}{36}$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{7/36}{11/36} = \frac{7}{11}$$

Sapendo che la somma è ≥ 7, qual è la probabilità di aver ottenuto 4 su almeno un dado

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\cancel{7}}{\cancel{11}} \cdot \frac{\cancel{11}}{\cancel{36}_{3}} \cdot \frac{\cancel{12}^{1}}{\cancel{7}} = \frac{1}{3}$$

ESERCIZIO Si hanno due urne

U_1 contiene 3 palline bianche e 5 rosse
U_2 contiene 5 palline bianche e 3 rosse.
Si lancia una moneta non truccata.
Se esce Testa estraggo 3 palline da U_1
se esce croce estraggo 3 palline da U_2
Calcolare la probabilità di estrarre 2 bianche e 1 rossa.

U_i := estraggo dalla urna i-esima $\qquad U_1 \cap U_2 = \emptyset$

$$\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{2} \qquad U_1 \cup U_2 = \Omega$$

A = estraggo 2 bianche e 1 rossa

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap U_1) + \mathbb{P}(A \cap U_2)$$
$$= \mathbb{P}(A | U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(A|U_2)\mathbb{P}(U_2)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{ \mathbb{P}(A|U_1) + \mathbb{P}(A|U_2) \right\}$$

$$\mathbb{P}(A|U_1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} \qquad \mathbb{P}(A|U_2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2\binom{8}{3}}\left\{ 5\binom{3}{2} + 3\binom{5}{2} \right\} = \frac{1}{2\binom{8}{3}}\left\{ 15 + 3\frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} \right\} =$$
$$= \frac{45}{2\binom{8}{3}}$$

Sapendo di aver estratto 2 bianche e 1 rossa calcolare la prob. di aver ottenuto Testa nel lancio della moneta

$$\mathbb{P}(U_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{15}{\cancel{\binom{8}{3}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\cancel{\binom{8}{3}}}{45} = \frac{1}{3}$$

EVENTI INDIPENDENTI

Dato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e $A, B \in \mathcal{E}$,
A e B si dicono indipendenti se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

N.B. $\emptyset$ e Ω sono indipendenti da ogni evento

$$\mathbb{P}(\emptyset \cap A) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(\emptyset)\mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(\Omega \cap A) = \mathbb{P}(A) = 1 \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Omega)\mathbb{P}(A)$$

PROPOSIZIONE Se A e B sono eventi indipendenti, allora anche

A^c e B

A e B^c sono coppie di eventi indipendenti

A^c e B^c

DIM $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(A)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
$= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}\left(A \setminus (A \cap B)\right) = \mathbb{P}\left(A \setminus B\right) = \mathbb{P}(A \cap B^c)$

— o —

DEF Sia $\{A_1 \dots A_n\} \subset \mathcal{E}$ famiglia finita di eventi, dico che ho una famiglia di eventi indipendenti se

$\forall k = 2, \dots n$ e $\forall \{A_{j_1} \dots A_{j_k}\} \subset \{A_1 \dots A_n\}$ si ha

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{s=1}^{k} A_{j_s}\right) = \prod_{s=1}^{k} \mathbb{P}(A_{j_s})$$

ESEMPIO $n = 3$

$\Omega = \{0,1\}^2$ con la probabilità uniforme

$$A_1 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 = 1\} = \{(1,0), (1,1)\}$$
$$A_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_2 = 1\} = \{(0,1), (1,1)\}$$
$$A_3 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 + \omega_2 = 1\} = \{(1,0), (0,1)\}$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

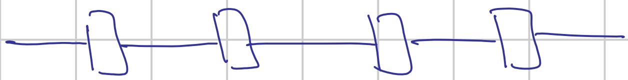
$A_1 \cap A_2 = \{(1,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$

$A_1 \cap A_3 = \{(1,0)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$

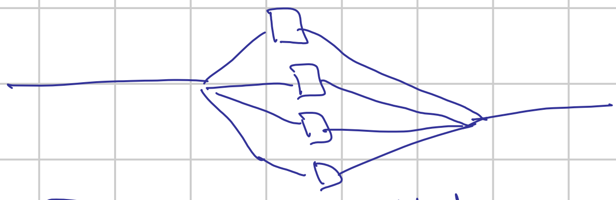
$A_2 \cap A_3 = \{(0,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq \left(\frac{1}{2}\right)^3$

SISTEMI IN SERIE E IN PARALLELO



sistema in serie



sistema in parallelo

Sistema in parallelo

Si guasta SSE tutti i sottosistemi si guastano

$E_i :=$ il sottosistema i si guasta

$E :=$ il sistema si guasta

$\Rightarrow E = \bigcap_{i=1}^{n} E_i \Rightarrow \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \min_{i=1 \dots n} \mathbb{P}(E_i)$

Se sono indipendenti $\Rightarrow \mathbb{P}(E) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$

Sistema in serie

Il sistema è "non guasto" SSE tutti i sottosistemi sono "non guasti"

$E^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c \qquad \mathbb{P}(E^c) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right)$

$1 - \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right) \qquad \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right)$

$\mathbb{P}(E) \geq 1 - \mathbb{P}(E_i^c) \quad \forall i = 1 \dots n$

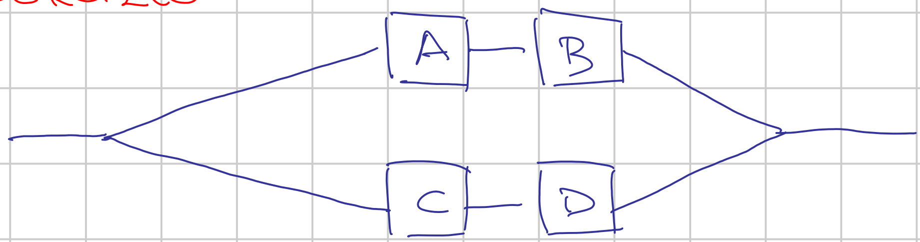
$\mathbb{P}(E) \geq \mathbb{P}(E_i) \quad \forall i = 1 \dots n$

$\mathbb{P}(E) \geq \max_{i=1, \dots n} \mathbb{P}(E_i)$

Se sono indipendenti: $\mathbb{P}(E) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i^c) =$

$1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(E_i))$

ESERCIZIO



A funziona con probabilità p_A

B p_B

C p_C

D p_D

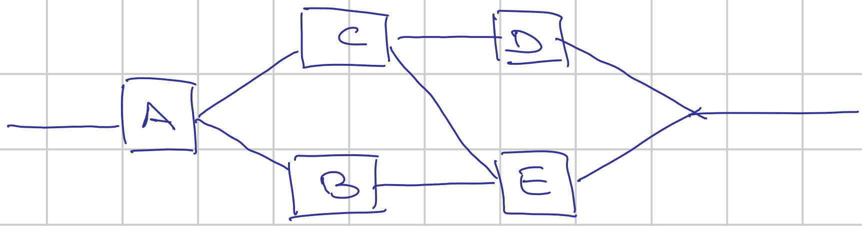
Sapendo che i sottosistemi sono indipendenti, calcolare la probabilità che il sistema funzioni.

$(A \cap B) \cup (C \cap D)$

$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C \cap D) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (C \cap D)) =$

$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$

$= p_A p_B + p_C p_D - p_A p_B p_C p_D -$



VARIABILI ALEATORIE

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Preso $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $\quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a,b]\} \in \mathcal{E}$

Dico che X è una variabile aleatoria su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

se: $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\} \in \mathcal{E}$

Se $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ non è uno spazio probabilizzato ma uno spazio di misura qualsiasi si usa la terminologia

"X è una funzione $\mathcal{E}$-misurabile".

ESEMPIO $\quad (\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia

$E \in \mathcal{E}$. Considero $X(\omega) = \mathbb{1}_E(\omega)$

$$\mathbb{1}_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in E \\ 0 & \omega \in E^c \end{cases}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\} = \begin{cases} \emptyset & t < 0 \\ E^c & 0 \le t < 1 \\ \Omega & t \ge 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow X$ è v.a. su ogni σ-algebra che contiene $\{\emptyset, E, E^c, \Omega\}$.

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\} = \{X \le t\}$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}$$