Esercizi 5 - Variabili aleatorie, distribuzione e integrazione

Esercizio 1. Si lancia n volte una moneta su cui ad ogni lancio esce testa con probabilità p. Sia X la v.a. data da

$$X := \#\text{ teste - }\#\text{ croci}$$

Calcolare la densità discreta di X.

Esercizio 2. Si hanno due urne. Ciascuna urna contiene n palline, numerate da 1 a n. Si estrae una pallina da ciascuna urna. Sia

$$X := \text{massimo dei due valori estratti}$$

Calcolare la densità discreta ed il valore atteso di X.

Esercizio 3. Un'urna contiene 6 palline bianche e 6 palline rosse. Si estraggono a caso 6 palline. Se si sono estratte 3 bianche e 3 rosse ci fermiamo, altrimenti reimbussoliamo le 6 palline estratte e ne estraiamo altre 6 a caso. Continuiamo così fino a che non estraiamo 3 bianche e 3 rosse. Qual è la probabilità che si debbano fare n estrazioni?

Esercizio 4. Si lancia n volte una moneta su cui ad ogni lancio esce testa con probabilità p. Calcolare la probabilità di ottenere un numero pari di teste.

Esercizio 5. Sia X v.a. con distribuzione di Poisson di parametro λ. Calcolare la probabilità che X sia pari.

Esercizio 6. La v.a. X segue la distribuzione gaussiana standard. La v.a. Y è così definita:

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{se } -1 < X(\omega) < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la legge della v.a. Y in termini della legge gaussiana standard $\Phi(t)$ e dire se la distribuzione $\mathbb{P}_Y$ è assolutamente continua.

Esercizio 7. La v.a. X, definita sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ è gaussiana di media μ e varianza σ^2. Sia $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$Y(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{se } X(\omega) \leq \mu - \sigma, \\ 0 & \text{se } \mu - \sigma < X(\omega) < \mu + \sigma, \\ 1 & \text{se } X(\omega) \geq \mu + \sigma. \end{cases}$$

Calcolare densità, media e varianza di Y in funzione della legge gaussiana standard Φ.

Esercizio 8. La v.a. X è esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Sia $Y := \mathrm{e}^X$. Determinare

1. la densità della v.a. Y,
2. i valori di λ per cui Y ha media finita (ed in tal caso calcolarla),
3. i valori di λ per cui Y ha varianza finita (ed in tal caso calcolarla).

Esercizio 9. La v.a. X è gaussiana di media μ e varianza σ^2. Sia $a > 0$ un parametro e si consideri la v.a. $Y := a\,|X - \mu|$. Calcolare la densità $g(y)$ e il valore atteso E della v.a. Y.

Esercizio 10. La v.a. X segue una distribuzione gaussiana di media μ. Sapendo che $\mathbb{P}\left(|X - \mu| \leq 1\right) \geq \dfrac{1}{2}$, calcolare una limitazione per lo squarto quadratico medio di X.

Esercizio 11. Una v.a. X segue la distribuzione gaussiana di media 6 e varianza 4. Calcolare $\mathbb{P}(|X - 8| \leq 1)$ in termini della funzione di ripartizione della gaussiana standard $\Phi(t)$, ristretta a $t \geq 0$.