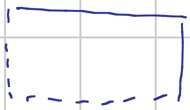
σ- ALGEBRA DI BOREL, PROBABILITÀ UNIFORME SU INTERVALLI

Titolo nota 02/10/2015

Chiamo n-intervallo o intervallo n-dimensionale di estremi $a=(a_1 \dots a_n)$, $b=(b_1 \dots b_n)$ l'insieme $I=\{x\in\mathbb{R}^n : a_i < x_i \le b_i \quad \forall i=1\dots n\}$



$$vol(I) := \prod_{i=1}^{n} (b_i-a_i)$$

Indico con $\mathcal{J}$ l'insieme degli n-intervalli e con $\mathcal{A}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ data dall'insieme vuoto e da tutti gli insiemi che si possono scrivere come unione finita di n-intervalli.

Osservazione: li posso sempre considerare disgiunti 2 a 2.

Si può dimostrare che $\mathcal{A}$ è un anello di $\mathbb{R}^n$.

Se $R\in\mathcal{A}$ e $R=\bigcup_{j=1}^{k} I_j \quad I_j\in\mathcal{J} \quad I_j\cap I_\ell=\emptyset \quad i\neq j$

Definisco

$$vol(R) = \sum_{j=1}^{k} vol(I_j)$$

Si può dimostrare che la definizione è ben posta cioè se $R=\bigcup_{j=1}^{k} I_j \quad I_j\in\mathcal{J} \quad I_j\cap I_\ell=\emptyset$

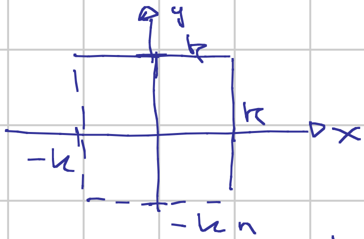
$$= \bigcup_{s=1}^{\ell} \tilde{I}_s \quad \tilde{I}_s\in\mathcal{J} \quad \tilde{I}_s\cap\tilde{I}_\ell=\emptyset$$

allora $$\sum_{j=1}^{k} vol(I_j) = \sum_{s=1}^{\ell} vol(\tilde{I}_s).$$

PROPOSIZIONE: La funzione $vol : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ è σ-additiva.

DIM 1) vol è additiva
2) vol è σ-subadditiva

Posso estendere la funzione vol$(\cdot)$ a tutte le σ-algebre generate da $\mathcal{A}$.



$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

$$Q_k = \prod_{i=1}^{n} (-k,k) \qquad \mathrm{vol}(Q_k) = \prod_{i=1}^{n} 2k = (2k)^n < +\infty$$

$$Q_k \subset Q_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ vol$(\cdot)$ è estendibile in modo unico a $\sigma(\mathcal{A})$

Si può dimostrare che ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ si può scrivere come unione numerabile di n-intervalli (anche a 2 a 2 disgiunti)

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{A})$ contiene la famiglia degli aperti e dunque contiene $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Viceversa ogni n-intervallo può essere scritto come unione (finita) di aperti e chiusi e quindi

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{A})$$

Dunque $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{A})$

Chiamo μ la misura che estende vol$(\cdot)$ a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e chiamo σ-algebra di Lebesgue il completamento di $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ rispetto a μ.

L'estensione di μ a tutta la σ-algebra di Lebesgue si dice MISURA DI LEBESGUE DI $\mathbb{R}^n$

PROBABILITÀ UNIFORME SU UN INTERVALLO

Fissato $[a,b] \subset \mathbb{R}$ indico con $\mathcal{B}([a,b])$ la famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$ contenuti in $[a,b]$.

$\mathcal{B}([a,b])$ è una σ-algebra

Per ogni $E \in \mathcal{B}([a,b])$ pongo

$$\mathbb{P}(E) := \frac{\text{Misura di Lebesgue di } E}{b-a}$$

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) = ([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \mathbb{P})$

$\mathrm{vol}(\{a\}) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{vol}\left(\left(a - \frac{1}{n}, a\right]\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

In particolare $\mu(E) = 0$ $\forall E \subset \mathbb{R}$ numerabile

— o —

$A_1 \; N \; A_2 \; G \; R \; A_3 \; M_1 \; M_2 \; A_4$

$\pi : \{1, \ldots 9\} \to \{1 \ldots 9\}$ $\qquad \dfrac{9!}{4!\,2!}$

— o —

N intero positivo

(x, y, z, w) interi positivi $\quad x + y + z + w = N$

x	$x = \alpha$	lineare 4×4
y	$x + y = \beta$	Triangolare
z	$x + y + z = \gamma$	$Av = b$
w	$x + y + z + w = \delta$	$\det A = 1$

$f : \{1, 2, 3, \cancel{4}\} \longrightarrow \{1, \ldots \ldots, N-1\}$

$f(1) = x$

$f(2) = x + y$ $\qquad f$ strettamente crescente

$f(3) = x + y + z$

$f(4) = x + y + z + w = N$ $\qquad \Downarrow$ $\dbinom{N-1}{3}$

(x, y, z, w) interi positivi $\quad x + y + z + w \leq N$

$f(1) = x$

$f(2) = x + y$

$f(3) = x + y + z$

$f(4) = x + y + z + w$

$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1 \ldots N\}$ strettamente crescenti $\dbinom{N}{4}$

N amici che partecipano ad una festa

$N \le 365$

$\Omega = \{1, 2, \dots, 365\}^N \qquad \#\Omega = 365^N$

A = insieme dei casi favorevoli = elementi di Ω che non hanno due componenti uguali

$$\#A = 365 \cdot 364 \cdot (365-2) \cdots (365-(N-1)) = \frac{365!}{(365-N)!}$$

$$P(A) = \frac{365!}{(365-N)!\,365^N} = p(N) \qquad N \in \{1, \dots, 365\}$$

$$\frac{p(N)}{p(N-1)} = \frac{\cancel{365!}}{(365-N)!\,\cancel{365^N}} \cdot \frac{(365-(N-1))!\,365^{\cancel{N-1}}}{\cancel{365!}} =$$

$$= \frac{365-(N-1)}{365} < 1 \qquad \forall N$$

$$p(1) = \frac{365!}{364!\,365} = 1$$

$p(1) = 1$

$N > 1$

$$p(N) = \frac{366-N}{365}\, p(N-1)$$

$N = N+1$

— o —

A insieme finito $\#A = n$

Quante sono le permutazioni di A che non hanno punti fissi?

Tutte le permutazioni sono $n!$

Insieme di tutte le permutazioni di A =

$$\bigcup_{k=0}^{n} \{\text{permutazioni di } A \text{ con } k \text{ pti fissi}\}$$

Indico con d_j = il numero di permutazioni

senza pti fissi di un insieme di j elementi
\# permutazioni di A con K pti fissi $= \binom{n}{k} d_{n-k}$

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} d_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} d_j$$

$$1 = d_0$$
$$1 = d_0 + d_1$$
$$2 = d_0 + 2d_1 + d_2$$
$$\vdots$$
$$n! = \binom{n}{0} d_0 + \binom{n}{1} d_1 + \cdots + \binom{n}{n-1} d_{n-1} + \binom{n}{n} d_n$$

sistema lineare $(n+1)\times(n-1)$ Matrice triangolare con determinante $=1$ $\Rightarrow$ se scrivo il sistema come $Ax = b$ ho $x = A^{-1}b$ cioè $d_k = \sum_{i=0}^{n} (A^{-1})^k_i \, i!$ $\forall k = 0 \_\_ n$

$$(A^{-1})^k_i = (-1)^{i+k} A^k_i = \begin{cases} (-1)^{i+k} \binom{k}{i} & i \le k \\ 0 & i > k \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+n} \binom{n}{i} i! = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+n} \frac{1}{(n-i)!} \qquad i = n-j$$
$$= n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

— o —

10 palline bianche
8 palline rosse Si estraggono 4 palline
12 palline nere
? Probabilità di estrarre 1 bianca, 2 rosse e 1 nera?
1) senza reimbussolamento
2) con reimbussolamento

$$\underbrace{1 \_\_\_ 10}_{\text{bianche}} \quad \underbrace{11 \_\_ 18}_{\text{rosse}} \quad \underbrace{19 \_\_ 30}_{\text{nere}}$$

$\Omega =$ Tutti i sottoinsiemi di cardinalità 4 dell'insieme $\{1 \_\_ 30\}$ $\Rightarrow$ $\#\Omega = \binom{30}{4}$

$\#A = 10 \binom{8}{2} 12$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{10 \cdot 12 \cdot \binom{8}{2}}{\binom{30}{4}}$$

ESPERIMENTO DI BERNOULLI RIPETUTO

Esperimento che ad ogni prova ha solo 2 possibili risultati:

0 1

T C

insuccesso successo

Ad ogni prova il successo ha la stessa probabilità p;

il risultato di ciascuna prova non è influenzato dalle altre prove

$$\Omega = \{0,1\}^n = \{\omega = (\omega_1 \dots \omega_n) : \omega_i \in \{0,1\} \ \forall i = 1 \dots n\}$$

$\bar{\omega} \in \Omega \qquad \bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 \dots \bar{\omega}_n)$

$$\mathbb{P}(\{\bar{\omega}\}) = p \dots p(1-p)\dots(1-p) = p^k (1-p)^{n-k}$$

se in $\bar{\omega}$ ci sono k successi (1)

$n-k$ insuccessi (0)

Ripeto l'esperimento n volte e fissato $k \in \{0, \dots n\}$ voglio calcolare la probabilità di ottenere k successi ed $n-k$ insuccessi

$$A = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ha } k \text{ componenti} = 1, \ n-k \text{ componenti} = 0\}$$

$\forall \omega \in A \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p^k (1-p)^{n-k}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p^k (1-p)^{n-k} = \#A \, p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Faccio n prove di un esperimento che ad ogni tentativo può dare j risultati

$e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_j$

Suppongo che ad ogni prova la probabilità di ottenere un certo esito non cambi

p_1 = probabilità di ottenere e_1

p_2 = e_2

$\vdots$

p_j = e_j

$$p_i \in [0,1] \qquad \sum_{i=1}^{j} p_j = 1$$

Il risultato di ciascuna prova non influenza le altre prove

$$\Omega = \{1, 2, \dots, j\}^n = \{\omega = (\omega_1 \dots \omega_n) : \omega_i \in \{1 \dots j\} \ \forall i = 1 \dots n\}$$

$$\bar{\omega} \in \Omega \qquad \mathbb{P}(\{\bar{\omega}\}) = p_1^{n_1} \, p_2^{n_2} \dots p_j^{n_j}$$

$$\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1 \dots \bar{\omega}_n)$$

n_i = # componenti di $\bar{\omega} = i$ (esito i)

Fisso $n_1, n_2 \dots n_j$ e voglio calcolare la probabilità di ottenere
n_1 volte l'esito 1
n_2 volte l'esito 2
$\vdots$
n_j volte l'esito j

$$A = \{\omega \in \Omega \text{ che hanno } n_1 \text{ componenti} = 1,\ n_2 \text{ componenti} = 2,\ \dots,\ n_j \text{ componenti} = j\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \#A \; p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_j^{n_j}$$

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-(n_1+\dots+n_{j-1})}{n_j}$$

$$=\frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}}\;\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}}\cdots\frac{\cancel{(n-(n_1+\dots+n_{j-2}))!}}{n_{j-1}!\,\cancel{(n-(n_1+\dots+n_{j-1}))!}}\;\frac{\cancel{(n-(n_1+\dots+n_{j-1}))!}}{n_j!\,0!}$$

$$=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_j!}=:\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_j}$$

$$\mathbb{P}(A)=\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_j}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_j^{n_j}$$

Dunque se consideriamo l'esercizio:

Ad ogni estrazione ho 3 possibili esiti:

e_1: estraggo pallina bianca con probabilità $P_1=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

e_2: estraggo pallina rossa con probabilità $P_2=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$

e_3: estraggo pallina nera con probabilità $P_3=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$

Ripeto l'esperimento $n=4$ volte

e voglio calcolare la probabilità di ottenere

$n_1=1$ volte l'esito e_1

$n_2=2$ volte l'esito e_2

$n_3=1$ volte l'esito e_3

$\Rightarrow$ la probabilità è $\binom{4}{1\ 2\ 1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{4}{15}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1=$

$$=\frac{4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}\;\frac{1}{\cancel{3}}\;\frac{16}{225}\;\frac{2}{5}=\frac{128}{1125}.$$