ESEMPI E COSTRUZIONE DI MISURE

Titolo nota 28/09/2015

PROBABILITÀ SU INSIEMI FINITI

$\Omega = \{\omega_1 \ldots \omega_n\}$ $\quad p_1, \ldots, p_n \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$

$\forall A \subset \Omega \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i : \omega_i \in A} p_i$

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ è uno spazio probabilizzato

Caso particolare $\quad p_i = C = \frac{1}{n} = \frac{1}{\# \Omega} \quad \forall i = 1 \ldots n$

PROBABILITÀ UNIFORME SU UN INSIEME FINITO

PROBABILITÀ SU INSIEMI NUMERABILI

$\Omega = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ insieme numerabile

Sia $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ t.c. $p_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$

$\forall A \subset \Omega$ pongo $\mathbb{P}(A) = \sum_{n : \omega_n \in A} p_n$

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ è uno spazio probabilizzato (dim per esercizio)

Osservazione Sia Ω un insieme qualsiasi. Sia $\Omega_0 \subset \Omega$ numerabile e sia $\Omega_0 = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$

Supponiamo sia data una funzione

$$f : \omega_n \in \Omega_0 \longmapsto p_n = f(\omega_n) \in [0,1] \quad \text{t.c.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

Per $A \subset \Omega$ pongo $\mathbb{P}(A) = \sum_{n : \omega_n \in A} f(\omega_n) = \sum_{n : \omega_n \in A} p_n$

Allora $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ è uno spazio probabilizzato. (dim per esercizio)

— o —

Definizioni

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato

Dico che un evento $B \in \mathcal{E}$ è $\mathbb{P}$-quasi impossibile se $\mathbb{P}(B) = 0$ (Trascurabile)

Dico che una proprietà $P(\omega)$ vale $\mathbb{P}$-quasi certamente (P-quasi ovunque) se l'insieme

$\{ \omega \in \Omega : P(\omega) = \text{false} \} \subset B$, $B \in \mathcal{E}$ $\mathbb{P}(B) = 0$

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

Sia $\mathcal{E}_{\mathbb{P}} := \{ A \subset \Omega : \exists B, C \in \mathcal{E}$ t.c. $\mathbb{P}(C) = 0$
$A \Delta B \subseteq C \}$

Si può dimostrare che:

$\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$ è una σ-algebra, $\mathcal{E}_{\mathbb{P}} \supseteq \mathcal{E}$ e si dice σ-ALGEBRA COMPLETAMENTO DI $\mathcal{E}$ RISPETTO A $\mathbb{P}$.

Per $A \in \mathcal{E}_{\mathbb{P}}$ sia B t.c. $A \Delta B$ è contenuto in un evento $\mathbb{P}$-quasi-impossibile. Pongo $\tilde{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{P}(B)$.
Dimostrare che la definizione è ben posta.

Gli eventi $\tilde{\mathbb{P}}$-trascurabili di $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$ sono tutti i sottoinsiemi di Ω contenuti in eventi $\mathbb{P}$-trascurabili di $\mathcal{E}$.

COSTRUZIONE DI MISURE

Ω insieme non vuoto

Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω

Dico che $\mathcal{A}$ è un <u>ANELLO DI Ω</u> se

1) $\phi \in \mathcal{A}$
2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B, A \cup B, A \cap B \in \mathcal{A}$

Sia $\mathcal{A}$ un anello di Ω e sia

$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$

Dico che μ è una FUNZIONE ADDITIVA su $\mathcal{A}$ se:

1) $\mu(\phi) = 0$
2) $A, B \in \mathcal{A}$ $A \cap B = \phi \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

<u>Osservazione</u> Se μ è additiva, allora è monotona crescente rispetto all'inclusione insiemistica:

$A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

DIM Basta scrivere $B = A \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{A}}$ $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
e applicare la definizione.

DEF Sia $\mathcal{A}$ un anello su Ω e sia $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$
Dico che μ è 𝜎-ADDITIVA se
1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ t.c. $A_i \cap A_j = \emptyset$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Dico che μ è 𝜎-SUBADDITIVA se
1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) $\forall B \in \mathcal{A}$, $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ t.c. $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\Rightarrow \mu(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

PROPRIETÀ Sia $\mathcal{A}$ un anello su un insieme Ω e sia $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$.
1) Se μ è sia additiva che 𝜎-subadditiva allora μ è 𝜎-additiva
2) Se μ è 𝜎-additiva, allora è sia additiva che 𝜎-subadditiva

DIM 1 Sia $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
Per la 𝜎-subadditività $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$
Devo dimostrare la disuguaglianza opposta
So che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
quindi $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$
Passando al limite nella somma ottengo

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

2 𝜎-additiva $\Rightarrow$ additiva BANALE
Devo dimostrare che 𝜎-additiva $\Rightarrow$ 𝜎-subadditiva.

$B \in \mathcal{A}$ $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ t.c. $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Devo far vedere che $\mu(B) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

$\tilde{A}_1 := A_1$

$\tilde{A}_2 := A_2 \setminus A_1$

$\vdots$

$\tilde{A}_k := A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j = \emptyset$, $\tilde{A}_i \subseteq A_i$

$$\Rightarrow \mu(B) \le \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

TEOREMA DI CARATHÉODORY

Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{A}$ un anello su Ω. Sia $\mathcal{E}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$: $\mathcal{E} := \sigma(\mathcal{A})$ e sia $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ funzione σ-additiva. Allora μ può essere estesa ad una misura su $(\Omega, \mathcal{E})$.

L'estensione è unica se μ è σ-FINITA su $\mathcal{A}$ cioè se $\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$: $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\mu(A_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$

— o —

Sia $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ funzione σ-additiva sull'anello $\mathcal{A}$

Per $E \subset \Omega$ pongo

$$\mu^*(E) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \text{ t.c. } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

$\mu^*(E)$ si dice MISURA ESTERNA DI E

$\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$

PROPRIETÀ 1) μ^* è una funzione monotona crescente rispetto all'inclusione insiemistica,

$E \subseteq F \Rightarrow \mu^*(E) \le \mu^*(F)$

2) μ^* estende μ cioè $\mu(E)=\mu^*(E)$ $\forall E\in\mathcal{A}$

DIMOSTRAZIONE PER ESERCIZIO

3) $\mu^*: \mathcal{P}(\Omega)\to[0,+\infty]$ È σ-SUBADDITIVA

DIM Sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ $E:=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$

Devo dimostrare che $\mu^*(E)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)$

Se $\exists\, i$ t.c. $\mu^*(E_i)=+\infty$ non c'è niente da dimostrare

Supponiamo che $\mu^*(E_i)$ sia finito $\forall i\in\mathbb{N}$.

Sia $\varepsilon>0$; per definizione di estremo inferiore

$\exists\{A_j^i\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$ t.c. $E_i\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j^i$ ←

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j^i)\le\mu^*(E_i)+\varepsilon 2^{-i}$$

$$\Rightarrow E\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j^i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j^i)\le\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^*(E_i)+\varepsilon 2^{-i}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)+\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i} \quad =1$$

$$\Rightarrow \mu^*(E)\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j^i)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)+\varepsilon$$

Poiché $\varepsilon>0$ è arbitrario ottengo la tesi.

— o —

Sia $A\subset\Omega$. Dico che A è un SOTTOINSIEME ADDITIVO SECONDO CARATHÉODORY se

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)\quad\forall E\subseteq\Omega$$

Osservazione 1) Se A è un sottinsieme additivo, allora anche A^c è un sottinsieme additivo.

2) L'insieme vuoto è additivo.

3) Sia A insieme additivo e sia $B\subseteq\Omega$ qualsiasi t.c. $A\cap B=\emptyset$. Scelgo $E=A\cup B$.

Poiché A è additivo abbiamo

$$\mu^*(A\cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Indico con $\mathcal{G}$ la famiglia dei sottoinsiemi additivi.

TEOREMA 1) $\mathcal{G}$ è una σ-algebra che contiene $\mathcal{a}$

2) μ^* è σ-additiva su $\mathcal{G}$.

DIM 1° PASSO $\mathcal{a} \subseteq \mathcal{G}$

Siano $A \in \mathcal{a}$ $E \in \mathcal{P}(\Omega)$

Devo far vedere che $\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c)$

Se $\mu^*(E) = +\infty$ non c'è niente da dimostrare

Se $\mu^*(E) < +\infty \overset{\forall \varepsilon>0}{\Rightarrow} \exists \{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{a}$

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu(B_i\cap A) + \mu(B_i \cap A^c)\right)$$

perché per ipotesi μ è σ-additiva su $\mathcal{a}$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i\cap A^c)$$

$$E\cap A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(B_i\cap A) \qquad E\cap A^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(B_i \cap A^c)$$

$$\geq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c)$$

cioè $\forall \varepsilon > 0$ $\mu^*(E) + \varepsilon \geq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c)$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo la tesi.

2° PASSO $\mathcal{G}$ è un'algebra

Rimane solo da mostrare che $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A\cup B \in \mathcal{G}$

Sia $E \subseteq \Omega$. Poiché A è un insieme additivo

$$\mu^*(E) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c) =$$

$$= \mu^*(E\cap A) + \mu^*((E\cap A^c)\cap B) + \mu^*\underbrace{((E\cap A^c)\cap B^c)}_{E\cap(A\cup B)^c}$$

$$(E\cap A)\cup((E\cap A^c)\cap B) \underset{\uparrow}{=} E\cap(A\cup B)$$

DIMOSTRARE PER ESERCIZIO

$$\geq \mu^*(E\cap(A\cup B)) + \mu^*(E\cap(A\cup B)^c)$$

$\Rightarrow \mu^*(E) = \mu^*(E\cap(A\cup B)) + \mu^*(E\cap(A\cup B)^c) \quad \forall E\subset\Omega$

3° PASSO $\mathcal{G}$ è una σ-algebra

Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}$. Devo far vedere che $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$

$\tilde{A}_1 = A_1$

$\tilde{A}_2 = A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{G}$

$\tilde{A}_k := A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \in \mathcal{G}$ perché $\mathcal{G}$ è un'algebra

$\Rightarrow$ posso supporre che gli A_i siano a due a due disgiunti.

Devo dimostrare che $\forall E\subset\Omega$ si ha

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap B) + \mu^*(E\cap B^c)$$

Se considero $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ so che $B_n \in \mathcal{G}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\mu^*(E\cap B) + \mu^*(E\cap B^c)$

$= \mu^*(E\cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) + \mu^*(E\cap B^c)$ $\quad B_n \subseteq B$

$= \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E\cap A_i)) + \mu^*(E\cap B^c)$ $\quad B_n^c \supseteq B^c$

$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E\cap A_i) + \mu^*(E\cap B_n^c)$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$ $\quad E\cap B_n^c \supseteq E\cap B^c$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E\cap A_i) + \mu^*(E\cap B_n^c)$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\mu^*(E\cap B) + \mu^*(E\cap B^c) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu^*(E\cap A_i) + \mu^*(E\cap B_n^c)\right)$

$\mu^*(E\cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E\cap A_i)$ si dimostra ripetendo il seguente argomento:

$\mu^*(E\cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i)) = \mu^*((\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i))\cap A_n) + \mu^*((\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap A_i))\cap A_n^c) =$

perché gli A_i sono a 2 a 2 disgiunti $= \mu^*(E\cap A_n) + \mu^*(E\cap \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) = \ldots \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E\cap A_i)$

$\mu^*(E\cap B) + \mu^*(E\cap B^c) \leq \limsup_{n\to\infty} \big(\underbrace{\mu^*(E\cap B_n) + \mu^*(E\cap B_n^c)}_{=\mu^*(E)}\big)$ perché $B_n \in \mathcal{G}$

e dunque B è un insieme additivo.

COME SI DIMOSTRA L'UNICITÀ

Sia Ω un insieme. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ si dice un

π - sistema se $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{K}$

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ si dice un SISTEMA DI DYNKIN se:

1) $\Omega, \phi \in \mathcal{D}$

2) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$

3) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ $A_i \cap A_j = \phi$ $i \neq j$ $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$

TEOREMA DI DYNKIN.

Se $\mathcal{K}$ e $\mathcal{D}$ sono rispettivamente un π-sistema e un sistema di Dynkin su Ω, e se $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ allora $\sigma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{D}$.

TEOREMA (CRITERIO DI COINCIDENZA)

Siano μ_1 e μ_2 due misure sullo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{E})$.

Se 1 l'insieme di coincidenza

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{E} \text{ t.c. } \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$$

contenga un π-sistema $\mathcal{K}$ t.c. $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{E}$.

2 $\exists \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}$ successione monotone crescente

t.c. $\mu_1(A_i) = \mu_2(A_i) < +\infty \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$$

Allora μ_1 e μ_2 coincidono su tutto $\mathcal{E}$.