

## Esercizi 2 - Probabilità elementare e costruzione di misure

**Esercizio 1.** Sia  $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$  uno spazio probabilizzato o uno spazio di misura. Sia

$$\mathcal{E}_{\mathbb{P}} := \{A \subseteq \Omega: \exists B, C \in \mathcal{E} \text{ tali che } A \Delta B \subseteq C, \mathbb{P}(C) = 0\}.$$

Provare che  $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$  è una  $\sigma$ -algebra di  $\Omega$ , che contiene  $\mathcal{E}$  e che  $\mathbb{P}$  può essere estesa ad una probabilità (o misura) su tutta  $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$  ponendo  $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(B)$  per ogni  $B \in \mathcal{E}$  tale che  $A \Delta B$  è contenuto in un evento quasi-impossibile.

**N.B.**  $\mathcal{E}_{\mathbb{P}}$  è detta  $\sigma$ -algebra completamento di  $\mathcal{E}$  rispetto a  $\mathbb{P}$ .

**Esercizio 2.** Su una scacchiera  $n \times n$  si dispongono  $n$  pedine (in riquadri distinti). Calcolare la probabilità che ogni riga e che ogni colonna contenga al più una pedina.

**Esercizio 3.** Un'urna contiene  $n$  palline, di cui 5 sono rosse. Si estraggono contemporaneamente due palline. Fissato  $\alpha \in (0, 1)$ , calcolare il minimo valore di  $n = n(\alpha)$  per cui la probabilità che siano entrambe rosse è inferiore ad  $\alpha$ .

**Esercizio 4.** Si scelgono due punti a caso sull'intervallo  $[0, 1]$ . Calcolare la probabilità che i tre segmenti in cui risulta diviso l'intervallo siano i lati di un triangolo.

**Esercizio 5.** In un club sportivo il 70% degli iscritti gioca a tennis, il 60% degli iscritti gioca a golf e il 40% pratica atletica leggera. Sapendo che tutti gli iscritti praticano almeno uno sport e che nessuno degli iscritti pratica tre sport, calcolare la percentuale di iscritti che pratica due attività.