DEFINIZIONE ASSIOMATICA

Titolo nota 25/09/2015

INTERPRETAZIONE CLASSICA (Pascal)

Definisce la probabilità di un evento come il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili.

INTERPRETAZIONE FREQUENTISTA

Si fanno infinite prove e si calcola il limite delle frequenze relative dei successi nelle prime n prove

$$\mathbb{P}(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{\#\text{successi in } n \text{ prove}}{n}$$

INTERPRETAZIONE SOGGETTIVA

La probabilità p di un evento è un numero $p \in [0,1]$ che esprime il grado di fiducia di un individuo coerente nel fatto che E si verifichi.
La coerenza significa che se $\mathbb{P}(E) = p$, allora $\mathbb{P}(E^c) = 1-p$.

TEORIA ASSIOMATICA (KOLMOGOROV)

Si interpreta l'evento certo come un insieme e i vari eventi come sottoinsiemi di questo insieme.
L'evento certo si dice SPAZIO DELLE EVENTUALITÀ e la probabilità sarà una funzione

$$\mathbb{P} : \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$

da cui mi aspetto

$\emptyset \in \mathcal{E}$ $\quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{E}$ $\quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B,\ A \cap B \in \mathcal{E}$

$\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{E}$

DEF Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

Dico che $\mathcal{E}$ è una ALGEBRA su Ω se

1) $\emptyset \in \mathcal{E}$
2) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c \in \mathcal{E}$
3) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \mathcal{E}$

σ-ALGEBRA su Ω

Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

Dico che $\mathcal{E}$ è una σ-algebra su Ω se

1) $\emptyset \in \mathcal{E}$
2) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c \in \mathcal{E}$
3) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ famiglia numerabile $\Rightarrow$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$$

Esercizio Verificare che la definizione è ridondante:

Osservazione $\emptyset \in \mathcal{E} \Rightarrow \emptyset^c = \Omega \setminus \emptyset = \Omega \in \mathcal{E}$

L'insieme vuoto si dice EVENTO IMPOSSIBILE

L'insieme Ω si dice EVENTO CERTO.

$A, B \in \mathcal{E}$ si dicono EVENTI INCOMPATIBILI se

$$A \cap B = \emptyset$$

La coppia $(\Omega, \mathcal{E})$ si dice SPAZIO MISURABILE.

N.B. $\mathcal{P}(\Omega)$ è una σ-algebra su Ω

$\{\emptyset, \Omega\}$ è una σ-algebra su Ω.

Osservazione 1) se $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ sono due σ-algebre su Ω,

allora $\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \ A \in \mathcal{E}, A \in \mathcal{F}\}$

è ancora una σ-algebra di Ω

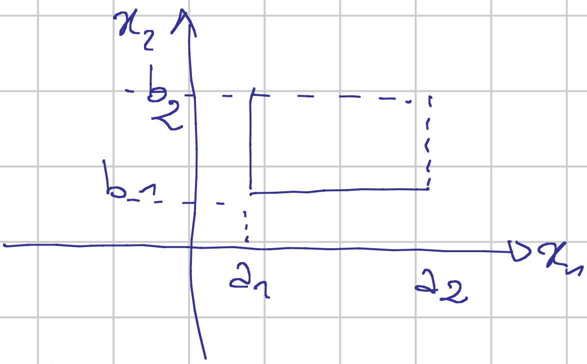
2) Se $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ è una qualsiasi famiglia di σ-algebre di Ω, allora la famiglia $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{E}_\alpha$ è ancora una σ-algebra su Ω.

Se $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ è una qualsiasi famiglia di sottoinsiemi di Ω, chiamiamo σ-ALGEBRA GENERATA DA $\mathcal{D}$ la famiglia

$$\sigma(\mathcal{D}) := \bigcap \{ \mathcal{E} : \mathcal{E} \text{ σ-algebra di } \Omega, \mathcal{E} \supset \mathcal{D} \}$$

Chiamiamo σ-ALGEBRA DI BOREL DI $\mathbb{R}^n$ la σ-algebra generata dalla famiglia degli aperti di $\mathbb{R}^n$.

Si può dimostrare che la σ-algebra di Borel coincide con la σ-algebra generata dalla famiglia dei rettangoli $R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $a_i < b_i$



MISURA

Sia $(\Omega, \mathcal{E})$ uno spazio misurabile e sia $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$

Dico che la funzione $\mathbb{P}$ è una MISURA su Ω se:

1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2) $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ famiglia numerabile contenuta in $\mathcal{E}$ t.c. $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ σ-ADDITIVITÀ DELLA MISURA

allora $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

La terna $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ si dice SPAZIO DI MISURA.

Se $\mathbb{P}$ è una misura su Ω e $\mathbb{P}(\Omega)=1$, allora dico che $(\mathcal{E},\mathbb{P})$ è una PROBABILITÀ su Ω.
La terna $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ si dice SPAZIO DI PROBABILITÀ o anche SPAZIO PROBABILIZZATO.

PROPRIETÀ Sia $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ spazio probabilizzato

1) $A\in\mathcal{E} \Rightarrow \mathbb{P}(A)\in[0,1]$ e $\mathbb{P}(A^c)=1-\mathbb{P}(A)$

Scelgo $A_1=A$

$A_2=A^c=\Omega\setminus A$

$A_i=\phi \quad i\geq 3$

$\Rightarrow A_i\cap A_j=\phi \quad i\neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2=\Omega$

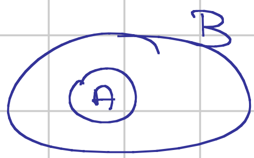
$$1=\mathbb{P}(\Omega)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A^c)+\sum_{i\geq 3}\mathbb{P}(\phi)$$
$$=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A^c)\geq\mathbb{P}(A) \quad \text{perché } \mathbb{P}(A^c)\geq 0$$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A)\in[0,1]$ e $\mathbb{P}(A^c)=1-\mathbb{P}(A)$

2) $A,B\in\mathcal{E} \quad A\subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A)\leq\mathbb{P}(B) \quad \mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B\setminus A)$

Scelgo $A_1=A$

$A_2=B\setminus A$

$A_i=\phi \quad \forall i\geq 3$



$\Rightarrow A_i\cap A_j=\phi \quad i\neq j \quad \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2=B$

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)=\mathbb{P}(A)+\underbrace{\mathbb{P}(B\setminus A)}_{\geq 0}\geq\mathbb{P}(A)$$

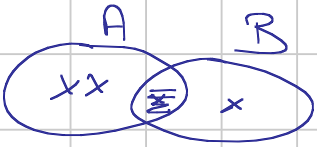
Osservazione $B\setminus A=B\cap A^c \Rightarrow B\setminus A\in\mathcal{E}$

3) $A,B\in\mathcal{E} \quad A\cap B=\phi \Rightarrow \mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$

$A_1=A \quad A_2=B \quad A_i=\phi \quad \forall i\geq 3$ e applico la definizione

$\{A_i\}_{i=1}^{n} \quad A_i\cap A_j=\phi \quad i\neq j \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$

4) $A,B\in\mathcal{E} \Rightarrow \mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$



$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

Sono disgiunti due a due

$\rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$

D'altra parte $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ $\quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B)$

$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ $\quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \cancel{\mathbb{P}(A \cap B)} + \cancel{\mathbb{P}(A \cap B)}$$

5) (σ- SUBADDITIVITÀ) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = A_1 \\ B_2 = A_2 \setminus A_1 \\ B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \\ \vdots \\ B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B_i \cap B_j = \emptyset \quad i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \\ B_i \subseteq A_i \Rightarrow \mathbb{P}(B_i) \leq \mathbb{P}(A_i) \end{array}$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

6) PROPRIETÀ DI DISINTEGRAZIONE O LEGGE DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Sia $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ una partizione di Ω in eventi

cioè $D_i \in \mathcal{E}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\quad D_i \cap D_j = \emptyset$ $i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \Omega$

allora $\forall A \in \mathcal{E}$ $\quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap D_i)$

Definisco $A_i = A \cap D_i$ $\quad i \in \mathbb{N}$

Allora $A_i \cap A_j \subseteq D_i \cap D_j = \emptyset$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap D_i) = A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = A \cap \Omega = A$

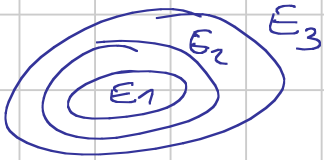
$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap D_i)$$

CONTINUITÀ DELLA MISURA

1) Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ una successione crescente di eventi: $E_i \subseteq E_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

Allora $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(E_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_i)$$

DIM



$A_1 = E_1$

$A_2 = E_2 \setminus E_1$

$\vdots$

$A_k = E_k \setminus E_{k-1}$

$\Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(E_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \overbrace{\mathbb{P}(E_i \setminus E_{i-1})}^{\mathbb{P}(E_i) - \mathbb{P}(E_{i-1}) \text{ perché } E_{i-1} \subseteq E_i}$$

$$= \mathbb{P}(E_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\mathbb{P}(E_i) - \mathbb{P}(E_{i-1})\right) =$$

$$= \cancel{\mathbb{P}(E_1)} - \cancel{\mathbb{P}(E_1)} + \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(E_N)$$

2) Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione decrescente di eventi:

$$E_i \supseteq E_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Allora $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(E_i) = \inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_i)$$

DIM Poiché $E_{i+1} \subseteq E_i$, ho che $E_i \subseteq E_1$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Posso scrivere $E_1 = E_i \cup (E_1 \setminus E_i)$

$E_i = E_1 \setminus (E_1 \setminus E_i)$

$\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_1 \setminus E_i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$

(A) $$\lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(E_i) = \lim_{i \to \infty} \left(\mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_1 \setminus E_i)\right) =$$
$$= \mathbb{P}(E_1) - \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(E_1 \setminus E_i)$$

$A_i := E_1 \setminus E_i$ sono una successione crescente di eventi

$$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(E_1 \setminus E_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_i)\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(E_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) =$$

$= \mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)$

Sostituisco in (*) e ottengo

$\lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(E_i) = \cancel{\mathbb{P}(E_1)} - \cancel{\mathbb{P}(E_1)} + \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)$

ESEMPI

MASSA DI DIRAC

Sia $\Omega \neq \emptyset$. Fisso un punto $\bar{\omega} \in \Omega$.

Per $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ pongo $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 & \bar{\omega} \in A \\ 0 & \bar{\omega} \notin A \end{cases}$.

Facciamo vedere che $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ è uno spazio probabilizzato

1) $\bar{\omega} \notin \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2) $\bar{\omega} \in \Omega \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$

3) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset$

Ci sono due casi: 1) $\bar{\omega}$ appartiene ad uno ed uno solo degli A_i, lo chiamo $A_{\bar{i}}$

$\mathbb{P}(A_{\bar{i}}) = 1 \quad \mathbb{P}(A_j) = 0 \quad j \neq \bar{i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1$

$\bar{\omega} \in A_{\bar{i}} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$

2) $\bar{\omega}$ non appartiene a nessuno degli A_i

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_i) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0$

Ma $\bar{\omega} \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$

MISURE ATOMICHE

Prendiamo Ω insieme finito $\Omega = \{\omega_1 \ldots \omega_n\}$

e siano $p_1, \ldots p_n \in \mathbb{R}$ $\quad p_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \ldots n$

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Pongo $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ e per $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ pongo

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i : \omega_i \in A} p_i$

Allora $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ è uno spazio probabilizzato

1) $\emptyset$ non contiene nessun $\omega_i \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Ω contiene tutti gli $\omega_i \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ perché $p_i \geq 0 \quad \forall i$

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{i:\omega_i \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} p_i = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{i:\omega_i \in A_k} p_i}_{} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Voglio scegliere i p_i tutti uguali $p_i = c$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{n} = \frac{1}{\#\Omega}$$

$$A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{\#A}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$