INTRODUZIONE e CALCOLO COMBINATORIO

Titolo nota 21/09/2015

http://www.dma.unifi.it/~poggiolini/didattica/2015-16-Probabilita.php

laura.poggiolini@unifi.it - Telefono 055 2758938
DIMAI c/o ex Facoltà di Ingegneria - Via di Santa Marta 3

MODICA - POGGIOLINI Note di Calcolo delle Probabilità
Seconda edizione.

Ambrosio - Da Prato - Mennucci "An Introduction to measure theory and probability" Sito SNS

Carlo Sempi - Calcolo delle Probabilità
Sito Università di Lecce

Blaise Pascal

1) Lancio un dado 4 volte: qual è la probabilità di ottenere almeno un 6?

2) Lancio due dadi 24 volte: qual è la probabilità di ottenere almeno un doppio 6?

$\#$ casi possibili $= 6^4$

$\#$ casi favorevoli $=$ $\#$ casi possibili $-$ $\#$ casi contrari

$= 6^4 - 5^4$

Prob di ottenere almeno un 6 in 4 lanci $=$

$$= \frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}} = \frac{6^4-5^4}{6^4} = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$\simeq 0.51775$$

— o —

$\#$ casi possibili $= (36)^{24}$

$\#$ casi favorevoli $=$ $\#$ casi possibili $-$ $\#$ casi contrari

$= (36)^{24} - (35)^{24}$

Probabilità di ottenere almeno un doppio 6 $=$

$$\frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}} = \frac{(36)^{24}-(35)^{24}}{(36)^{24}} = 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

$$\simeq 0.4914$$

— o —

Poker con carte dall'asso all'otto

A K Q J 10 9 8 $=$ 7 carte $\times$ 4 semi

$=$ 28 carte

CASI POSSIBILI $=$ tutti i sottoinsiemi di cardinalità 5 dell'insieme delle 28 carte $\binom{28}{5}$

Poker d'assi $=$ tutti i sottoinsiemi di cardinalità 5 che contengono i 4 assi: 24 casi

casi favorevoli per un poker qualsiasi $= 7 \cdot 24$

Probabilità di ottenere un poker servito $= \dfrac{7 \cdot 24}{\binom{28}{5}}$

Colore a cuori: # casi favorevoli $= \binom{7}{5}$

Colore qualsiasi: # casi favorevoli $= 4\binom{7}{5}$

Probabilità di ottenere un colore servito $= \dfrac{4\binom{7}{5}}{\binom{28}{5}}$

CALCOLO COMBINATORIO

Sia A insieme di cardinalità n e sia $k \in \{0, 1, \dots n\}$

Il numero $d_{n,k}$ dei suoi sottoinsiemi di cardinalità k è $\binom{n}{k}$.

DIM $d_{n,0} = 1$ Solo l'insieme vuoto ha cardinalità zero

$d_{n,1} = n$

Tra n candidati voglio selezionare una squadra di k giocatori con un capitano.

1. Seleziono k giocatori tra gli n candidati:
   ci sono $d_{n,k}$ diverse possibilità
   Tra i k giocatori seleziono un capitano:
   ci sono k diverse possibilità

   $\Rightarrow$ ci sono $\underline{k \cdot d_{n,k}}$ diverse squadre con capitano

2. Seleziono il capitano tra gli n candidati:
   ci sono n diverse possibilità
   Poi seleziono gli altri $k-1$ giocatori dagli altri $n-1$ candidati: ci sono $d_{n-1,k-1}$ diverse possibilità

   $\Rightarrow$ ci sono $\underline{n \cdot d_{n-1,k-1}}$ diverse squadre con capitano

$$\Rightarrow \quad k\, d_{n,k} = n\, d_{n-1,k-1}$$

$$d_{n,k} = \frac{n}{k} d_{n-1,k-1}$$

$d_{n,0} = 1$

$d_{n,1} = n$

$d_{n,2} = \frac{n}{2} d_{n-1,1} = \frac{n}{2}(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \binom{n}{2}$

$d_{n,3} = \frac{n}{3} d_{n-1,2} = \frac{n}{3}\frac{n-1}{2} \cdot (n-2) = \frac{n!}{(n-3)!\,3!} = \binom{n}{3}$

¿ $d_{n,k} = \binom{n}{k}$?

Verifico per induzione

$$d_{n,1} = n = \binom{n}{1}$$

$$d_{n,k} = \frac{n}{k} d_{n-1,k-1} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-\cancel{1}-(k-\cancel{1}))!}$$

$$= \frac{n!}{k!}\frac{1}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \underline{\text{ok}}$$

PERMUTAZIONI LIBERE

Se A è un insieme finito chiamo permutazione di A una qualsiasi applicazione $\pi : A \to A$ biunivoca.

Se A ha cardinalità n, allora le permutazioni di A sono $n!$

<u>DIM</u> Posso supporre $A = \{1, 2, \dots, n\}$

Quante scelte ho per $\pi(1)$?

Ci sono n diverse possibili scelte per $\pi(1)$

ci sono $n-1$ diverse possibili scelte per $\pi(2)$

$n-2$ $\qquad \pi(3)$

$\vdots$

2 $\qquad \pi(n-1)$

1 $\qquad \pi(n)$

$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ diverse permutazioni

MULTIINSIEMI

Sia A insieme finito. Un multiinsieme su A è una coppia (A, α) dove $\alpha : A \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$

<u>ESEMPIO</u> $A = \{a, b, c\}$

$$\{a^2, c^3\} = (A, \alpha) \qquad \alpha(a) = 2 \quad \alpha(c) = 3$$

$$\alpha(b) = 0$$

(A, α) e (B, β) multiinsiemi

Dico che $(B, \beta) \subseteq (A, \alpha)$

se: $\begin{cases} B \subseteq A \\ \beta(x) \leq \alpha(x) \quad \forall x \in B \end{cases}$

<u>Oss</u> Se $(B, \beta) \subseteq (A, \alpha)$ posso vedere anche (B, β) come multiinsieme su A

Identifico $(B, \beta) \simeq (A, \tilde{\beta})$

$$\tilde{\beta}(x) = \begin{cases} \beta(x) & x \in B \\ 0 & x \in A \setminus B \end{cases}.$$

Se (A, α) è un multiinsieme chiamo CARDINALITÀ DI (A, α) il numero $\sum_{x \in A} \alpha(x)$

P.es $\# \{a^2, c^3\} = 2+0+3 = 5$

Sia A un insieme finito di cardinalità n, e sia k intero nonnegativo. Allora i multiinsiemi su A che hanno cardinalità k sono $\binom{n+k-1}{k}$.

<u>DIM</u> Posso supporre $A = \{1, 2, \dots, n\}$

$\alpha(1) = x_1 \qquad \alpha(n) = x_n$

$\alpha(2) = x_2 \quad \dots \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha(i) = k$

$$\underbrace{0 \dots 0}_{x_1 \text{ volte}} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{x_2 \text{ volte}} 1 \dots\dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{x_n \text{ volte}}$$

$$(n-1) + \underbrace{x_1 + x_2 \dots + x_n}_{=k} = n+k-1$$

Scegliere un multiinsieme significa scegliere le $n-1$ posizioni del carattere "1" nelle $n+k-1$ possibili posizioni

$\Rightarrow$ ci sono $\binom{n+k-1}{n-1}$ diversi multiinsiemi

$$= \binom{n+k-1}{k}$$

LISTE

Dato un insieme A chiamo k-lista su A una k-upla ordinata di elementi di A.
Se A ha cardinalità n, allora le k-liste su A sono n^k

__DIM__ n scelte per la 1ª componente
n scelte per la 2ª componente
⋮
n scelte per la k-esima componente

$\Rightarrow$ n^k diverse possibili scelte.

FUNZIONI TRA INSIEMI FINITI

Sia $f:\{1, \dots k\} \to \{1, \dots n\}$
La funzione è univocamente determinata dalla k-lista $(f(1), f(2), \dots f(k))$ su $\{1, \dots n\}$
Le funzioni e le k-liste su $\{1 \dots n\}$ sono in corrispondenza biunivoca $\Rightarrow$ ci sono n^k funzioni diverse

FUNZIONI INIETTIVE

Quante sono le funzioni iniettive $f:\{1, \dots k\} \to \{1, \dots n\}$?
Ci sono n scelte per $f(1)$
$n-1$ scelte per $f(2)$
⋮
$n-(k-1)$ scelte per $f(k)$

$\Rightarrow$ ci sono $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{=\frac{n!}{(n-k)!}}$ funzioni iniettive

FUNZIONI STRETTAMENTE CRESCENTI

Se f è strettamente crescente $\Rightarrow$ è iniettiva

Una volta che conosco l'insieme immagine (che è un sottoinsieme di cardinalità k di $\{1, \ldots n\}$) conosco la funzione.

Quindi ci sono $d_{n,k} = \binom{n}{k}$ funzioni strettamente crescenti.

FUNZIONI NON DECRESCENTI

$f : \{1, \ldots k\} \to \{1 \ldots n\}$

$(f(1), f(2) \ldots f(k))$ $\qquad f(1) \leq f(2) \ldots \leq f(k)$

$Imf = \{a_1, \ldots a_j\} \quad j \leq k$

$a_1^{x_1} \; a_2^{x_2} \ldots a_j^{x_j} \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_j = k$

$Imf \subset \{1, \ldots n\}$

Ci sono $\binom{n+k-1}{k}$ diverse funzioni non decrescenti

FUNZIONI SURIETTIVE (no dim)

Le funzioni suriettive da $\{1, \ldots k\}$ su $\{1 \ldots n\}$ sono

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k$$

ESTRAZIONI

$A = \{1, \dots n\}$

ESTRAZIONE ORDINATA DA A

È un'estrazione senza reimbussolamento in cui conta l'ordine dell'estrazione.

Faccio K estrazioni successive

Le posso vedere come una funzione

$$f : \{1 \dots k\} \to \{1 \dots n\} \text{ iniettiva.}$$

$\Rightarrow \dfrac{n!}{(n-k)!}$ diverse estrazioni

ESTRAZIONE ORDINATA CON REIMBUSSOLAMENTO

Le posso vedere come una funzione $f : \{1 \dots k\} \to \{1 \dots n\}$ qualsiasi $\Rightarrow$ ci sono n^k diverse estrazioni

ESTRAZIONI SEMPLICI SENZA REIMBUSSOLAMENTO

Seleziono K elementi in un insieme di n elementi

$\Rightarrow$ ci sono $d_{n,k} = \binom{n}{k}$ diverse estrazioni

ESTRAZIONI SEMPLICI CON REIMBUSSOLAMENTO

Seleziono un multinsieme di cardinalità K dell'insieme $\{1, 2, \dots n\}$

$\Rightarrow$ ci sono $\binom{n+k-1}{k}$ diverse estrazioni