Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 19/12/2014.

Nome e Cognome: **Data dell'orale:**

Compito A

1. X e Y sono v.a. indipendenti. X è uniformemente distribuita sull'intervallo $[-2, 2]$ mentre Y è uniformemente distribuita sull'intervallo $[-1, 1]$. Calcolare legge, densità e valore atteso della v.a. $Z := \max\{X, Y\}$.

2. X e Y sono v.a. indipendenti. X è uniformemente distribuita sull'intervallo $[0, 1]$ mentre Y ha distribuzione esponenziale di parametro 4. Calcolare la densità della v.a. $Z := X + Y$.

3. Le v.a. X e Y hanno densità congiunta $f(x, y) = c\,\mathbb{1}_T(x, y)$ dove T è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$.

Determinare il valore di c e la densità della v.a. $Z := X - Y$

4. **(4 punti)** Scrivere i vari modi di esprimere l'indipendenza di due variabili aleatorie.

5. **(5 punti)** Enunciare e dimostrare la legge debole dei grandi numeri

6. **(6 punti)** Calcolare il pozzo dell'applicazione lineare associata alla matrice stocastica $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

7. Un treno può muoversi su un binario infinito solo in questo modo: ogni minuto il capotreno lancia due dadi. Se la somma è divisibile per tre, il treno si muove verso destra di 3 metri, se la somma è congrua 1 modulo 3 il treno rimane fermo, se la somma è congrua 2 modulo 3, il treno si muove a sinistra di 1 metri. Posso interpretare questo moto come una catena di Markov? Se sì, scrivere la matrice di transizione.

8. Definire e caratterizzare le classi chiuse minimali di una matrice stocastica

9. Definire la nozione di processo stocastico e di catena di Markov a tempo discreto e stati discreti

10. È data una catena di Markov a tempo discreto e stati finiti. Cosa è il numero medio di visite in uno stato e come lo si calcola?

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 19/12/2014.

Nome e Cognome: **Data dell'orale:**

Compito B

1. X e Y sono v.a. indipendenti. X è uniformemente distribuita sull'intervallo $[0, 2]$ mentre Y è uniformemente distribuita sull'intervallo $[-1, 1]$. Calcolare legge, densità e valore atteso della v.a. $Z := \max\{X, Y\}$.

2. X e Y sono v.a. indipendenti. X è uniformemente distribuita sull'intervallo $[-1, 0]$ mentre Y ha distribuzione esponenziale di parametro 2. Calcolare la densità della v.a. $Z := X + Y$.

3. Le v.a. X e Y hanno densità congiunta $f(x, y) = c\,\mathbb{1}_T(x, y)$ dove T è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 0)$.

Determinare il valore di c e la densità della v.a. $Z := X - Y$

4. **(4 punti)** Definire la nozione di indipendanza di due v.a. e dire quali implicazioni questa ha sul calcolo delle varianze.

5. **(5 punti)** Enunciare e dimostrare la formula per il calcolo della densità della somma di v.a. indipendenti e con distribuzione assolutamente continua

6. **(6 punti)** Calcolare il pozzo dell'applicazione lineare associata alla matrice stocastica $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

7. Un treno può muoversi su un binario infinito solo in questo modo: ogni minuto il capotreno lancia due dadi. Se la somma è divisibile per tre, il treno si muove verso destra di 1 metri, se la somma è congrua 1 modulo 3 il treno rimane fermo, se la somma è congrua 2 modulo 3, il treno si muove a sinistra di 2 metri. Posso interpretare questo moto come una catena di Markov? Se sì, scrivere la matrice di transizione.

8. Definire e caratterizzare gli stati ricorrenti di una matrice stocastica

9. Definire la nozione di catena di Markov a tempo discreto e stati discreti e enunciare la proprietà di Markov forte

10. È data una catena di Markov a tempo discreto e stati finiti. Cosa è il tempo di primo passaggio in uno stato e come se ne calcola la distribuzione?