Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 21/11/2014.

Nome e Cognome: **Data dell'orale:**

Compito A

1. **(4 punti)** Quante sono le funzioni strettamente crescenti da $\{1, 2, 3, 4\}$ in $\{1, 2, \ldots, 12\}$ tali che $f(3) = 9$?
E quelle tali che $f(3) \geq 9$?

2. **(5 punti)** Si hanno 2 urne e 2 monete. Si lanciano le monete:
se escono due teste si estraggono due palline dalla prima urna,
se escono due croci si estraggono due palline dalla seconda urna,
se esce una testa ed una croce si estrae una pallina da ciascuna urna.
La prima urna contiene 3 palline bianche e 6 palline rosse.
La seconda urna contiene 5 palline bianche e 4 palline rosse.
Calcolare la probabilità di estrarre due palline bianche.
Sapendo di aver estratto due palline bianche, calcolare la probabilità di aver ottenuto due teste nel lancio delle monete.

3. Definizione di σ-algebra e di σ-algebra di Borel.

4. Enunciare e dimostrare la (prima) proprietà di continuità della misura.

5. Introdurre uno spazio probabilizzato che descriva il lancio di quattro monete eque

6. Sia X una v.a. distribuita sugli interi non negativi e sia Y una v.a. di Bernoulli di parametro $p = \frac{1}{4}$. Sapendo che

$$\mathbb{P}(X = k|Y = 0) = q(1-q)^k, \qquad \mathbb{P}(X = k|Y = 1) = (1-q)q^k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

calcolare densità discreta e valore atteso di X.

7. La v.a. X ha distribuzione a.c. associata alla densità $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
Determinare la distribuzione della v.a. $Y := e^{2X}$

8. La v.a. X ha distribuzione a.c. associata alla densità $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in (-1,0) \\ x & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Calcolare speranza e varianza di X.

9. Definizione di variabile aleatoria e di distribuzione di variabile aleatoria

10. Dimostrare che se X è una v.a. a valori reali e $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione Borelliana semplice nonnegativa, allora $\mathbb{E}[\varphi \circ X] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathbb{P}_X(dt)$. Ci sono altre funzioni per cui vale questa uguaglianza?

11. Descrivere la distribuzione di Poisson ed enunciare la proprietà degli eventi rari.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 21/11/2014.

Nome e Cognome: **Data dell'orale:**

Compito B

1. **(4 punti)** Quante sono le funzioni non decrescenti da $\{1, 2, 3, 4\}$ in $\{1, 2, \ldots, 10\}$ tali che $f(3) = 8$? E quelle tali che $f(3) \geq 8$?

2. **(5 punti)** Si hanno 2 urne e 2 monete. Si lanciano le monete:
se escono due teste si estraggono due palline dalla prima urna,
se escono due croci si estraggono due palline dalla seconda urna,
se esce una testa ed una croce si estrae una pallina da ciascuna urna.
La prima urna contiene 6 palline bianche e 3 palline rosse.
La seconda urna contiene 4 palline bianche e 5 palline rosse.
Calcolare la probabilità di estrarre due palline bianche.
Sapendo di aver estratto due palline bianche, calcolare la probabilità di aver ottenuto due teste nel lancio delle monete.

3. Definizione di spazio probabilizzato.

4. Enunciare e dimostrare la formula di Bayes.

5. Introdurre uno spazio probabilizzato che descriva il lancio di due dadi equi.

6. Sia X una v.a. distribuita sugli interi non negativi e sia Y una v.a. di Bernoulli di parametro $p = \frac{1}{3}$. Sapendo che

$$\mathbb{P}(X = k|Y = 0) = q(1-q)^k, \qquad \mathbb{P}(X = k|Y = 1) = (1-q)q^k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

calcolare densità discreta e valore atteso di X.

7. La v.a. X ha distribuzione a.c. associata alla densità $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
Determinare la distribuzione della v.a. $Y := e^{-2X}$

8. La v.a. X ha distribuzione a.c. associata alla densità $f(x) = \begin{cases} -x & x \in (-1,0) \\ 1-x & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Calcolare speranza e varianza di X.

9. Enunciare e dimostrare la proprietà di continuità da destra delle leggi

10. Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Markov

11. Descrivere la distribuzione geometrica modificata e la proprietà di mancanza di memoria

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (270)
Metodi Matematici e Probabilistici (9 CFU)
Prova intermedia del 21/11/2014.

Nome e Cognome: **Data dell'orale:**

Compito C

1. **(4 punti)** Quante sono le funzioni non decrescenti da $\{1, 2, 3, 4\}$ in $\{1, 2, \ldots, 11\}$ tali che $f(3) = 9$? E quelle tali che $f(3) \geq 9$?

2. **(5 punti)** Si hanno 2 urne e 2 monete. Si lanciano le monete:
se escono due teste si estraggono due palline dalla prima urna,
se escono due croci si estraggono due palline dalla seconda urna,
se esce una testa ed una croce si estrae una pallina da ciascuna urna.
La prima urna contiene 5 palline bianche e 4 palline rosse.
La seconda urna contiene 6 palline bianche e 3 palline rosse.
Calcolare la probabilità di estrarre due palline bianche.
Sapendo di aver estratto due palline bianche, calcolare la probabilità di aver ottenuto due teste nel lancio delle monete.

3. Definizione di spazio di misura.

4. Enunciare e dimostrare il teorema delle probabilità totali.

5. Introdurre uno spazio probabilizzato che descriva l'estrazione a caso di due palline da un'urna che contiene 4 palline bianche e 3 palline rosse, a due a due distinguibili.

6. Sia X una v.a. distribuita sugli interi non negativi e sia Y una v.a. di Bernoulli di parametro $p = \frac{2}{3}$. Sapendo che

$$\mathbb{P}(X = k|Y = 0) = q(1-q)^k, \qquad \mathbb{P}(X = k|Y = 1) = (1-q)q^k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

calcolare densità discreta e valore atteso di X.

7. La v.a. X ha distribuzione a.c. associata alla densità $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Determinare la distribuzione della v.a. $Y := e^{3X}$

8. La v.a. X ha distribuzione a.c. associata alla densità $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in (-1,0) \\ 1-x & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Calcolare speranza e varianza di X.

9. Enunciare e dimostrare le proprietà dei limiti sinistri delle leggi

10. Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Chebichev

11. Descrivere la distribuzione esponenziale e la proprietà di mancanza di memoria