CONVERGENZA DI SUCCESSIONI DI V.A.

Titolo nota 16/12/2014

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ v.a. su $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$

1) CONVERGENZA IN PROBABILITÀ

Dico che X_n converge in probabilità ad una v.a X su $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$, se

$$\forall\delta>0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n-X|>\delta)=0$$

2) CONVERGENZA $\mathbb{P}$-QUASI CERTA $\mathbb{P}$-q.c.

Dico che X_n converge $\mathbb{P}$-quasicertamente ad una v.a X su $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ se

$$\exists\, \Omega_1 \in \mathcal{E} \quad \mathbb{P}(\Omega_1)=1 \quad \text{t.c.}$$

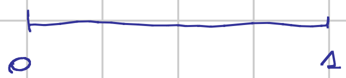
$$\forall\omega\in\Omega_1 \quad \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)=X(\omega).$$

3) CONVERGENZA $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{P})$

Dico che X_n converge in $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{P})$ ad una v.a. X su $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$ se

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |X_n-X|^2(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = 0$$

— o —



$$(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{L}^1)$$

— o —

LEGGE DEBOLE DEI GRANDI NUMERI

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. su $(\Omega,\mathcal{E},\mathbb{P})$

- a due a due scorrelate
- $\mathbb{E}[X_n] = E \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- $\mathrm{Var}[X_n] \leq C^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Allora $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\right|>\delta\right) \leq \frac{C^2}{\delta^2 n}$ $\quad S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$

cioè $\frac{S_n}{n}$ converge in probabilità alla v.a. costante $X \equiv E$

LEGGE FORTE DEI GRANDI NUMERI

Nelle stesse ipotesi della legge debole,

$\frac{S_n}{n}$ converge alla v.a. costante $X = E$

sia in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$ che $\mathbb{P}$-q.c.

(TEOREMA DI RAJCHMANN).

TEOREMA DI ETEMADI:

Supponiamo che $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia una successione di v.a.

su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$
- le X_n sono a due a due indipendenti
- le X_n sono identicamente distribuite
- $\mathbb{E}[X_n] = E$ finito

Allora $\frac{S_n}{n}$ converge $\mathbb{P}$-q.c. alla v.a. costante $X = E$.

Nelle stesse ipotesi del Teorema di Etemadi, se so che anche le varianze sono finite: $Var[X_n] = C^2$ si ha una stima della velocità di convergenza:

Per semplicità supponiamo $\mathbb{E}[X_n] = 0$. Allora

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{S_n(\omega)}{C\sqrt{2n \log(\log(n))}} = 1 \quad \mathbb{P}\text{-q.c. } \omega \in \Omega$$

— o —

$\{a_n\}$ successione in $\mathbb{R}$

Dico che $\limsup a_n = L$

$\exists \bar{n}\ \forall n > \bar{n} \quad a_n < L + \varepsilon$

$\forall \bar{k}\ \exists k > \bar{k} \quad a_k > L - \varepsilon$

$L + \varepsilon$

$L - \varepsilon$

$\forall \delta > 0 \qquad \left| \frac{S_n(\omega)}{n} \right| \le C(1+\delta)\sqrt{2}\sqrt{\frac{\log(\log(n))}{n}} \qquad \mathbb{P}\text{ q.c. } \omega \in \Omega$

— o —

$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Borel-misurabile e limitata $|f(x)| \le M \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

$(\mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ misura di probabilità

Vogliamo calcolare $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mu(dx) = \bar{f}$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Supponiamo di avere $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$\{X_n\}$ successione di v.a. t.c. $\mathbb{P}_{X_n} = \mu$

e due a due indipendenti

$Y_n = f(X_n)$

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\mathbb{R}^N} f(t)\mu(dt) = \bar{f}$$

$$\mathbb{E}[|Y_n|] = \mathbb{E}[|f(X_n)|] = \int_{\mathbb{R}^N} |f(t)|\mu(dt) \le M \cdot 1 = M$$

$$Var[Y_n] = Var[f(X_1)] = \int_{\mathbb{R}^N} |f(t) - \bar{f}|^2 \mu(dt) \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^N} (\underbrace{|f(t)|}_{\le M} + \underbrace{|\bar{f}|}_{\le M})^2 \mu(dt) \le \int_{\mathbb{R}^N} 4M^2 \mu(dt) = 4M^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j(\omega)) \longrightarrow \bar{f} \qquad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$