CATENE DI MARKOV

Titolo nota 15/12/2014

TEO $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

S insieme finito o numerabile

$X_0 : \Omega \to S$ v.a su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ successione di v.a su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, a valori in $\mathbb{R}^N$

$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ identicamente distribuite, con $X_0, \{\xi_n\}$ famiglia di v.a indipendenti

$f : S \times \mathbb{R}^N \to S$ t.c. $\forall i \in S$ $f(i, \cdot)$ è $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$-misurabile

---

$g : (x, y) \in A \times B \mapsto g(x,y) \in C$

$g(\cdot, y) : x \in A \mapsto g(x,y) \in C$ $\quad h_y(x) = g(x,y)$

$\omega \in \Omega$ $\quad X_{n+1}(\omega) := f(X_n(\omega), \xi_n(\omega))$

$\Rightarrow \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una catena di Markov e

$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \boxed{\mathbb{P}(f(i, \xi_n) = j)}$

sono identicamente distribuite $\Rightarrow$ queste probabilità non dipende da n

$X_0(\omega) \in S$ $\forall \omega \in \Omega$

$\xi_0(\omega) \in \mathbb{R}^N$ $\forall \omega \in \Omega$ $\quad \Rightarrow f(X_0(\omega), \xi_0(\omega))$ è ben definito, sta in S e lo chiamo $X_1(\omega)$

$X_1(\omega) \in S$ $\quad f(X_1(\omega), \xi_1(\omega)) = X_2(\omega)$

$\xi_1(\omega) \in \mathbb{R}^N$

TEO $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato, S insieme finito o numerabile. $X_0 : \Omega \to S$ v.a.

$\underline{\underline{P}} = (P^i_j)$ matrice stocastica indicizzata da S

$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a, da Ω in $[0,1]$, uniformemente distribuite: $\mathbb{P}_{\xi_n} = U([0,1])$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e t.c.

$X_0, \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ famiglia di v.a. indipendenti

Per $x\in[0,1]$ definisco

$$f(i,x)=\begin{cases}\min\{j\in\mathbb{N}: \sum_{h=1}^{j} P_h^i \geq x\} & \text{se } \exists j \text{ t.c. } \sum_{h=1}^{j} P_h^i \geq x\\ +\infty & \text{se } \sum_{h=1}^{j} P_h^i < x \quad \forall j\in\mathbb{N}\end{cases}$$

e pongo

$$X_{n+1}(\omega):=f(X_n(\omega),\xi_n(\omega)) \qquad n\in\mathbb{N}$$

$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega: \xi_n(\omega)<1\})=1$

$$F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ t & t\in[0,1)\\ 1 & t\geq 1\end{cases}$$

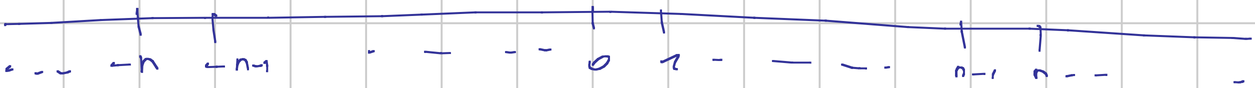
$f(i,x)=+\infty \Rightarrow x=1$

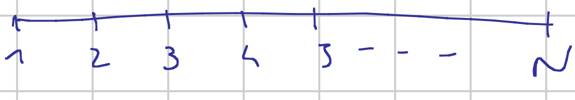
$\mathbb{P}(\xi_n=1)=0 \quad \mathbb{P}(f(i,\xi_n)=+\infty)=0$

$Q_j^i=\mathbb{P}(f(i,\xi_n)=j)$

$f(i,\xi_n(\omega))=j \iff \sum_{h=1}^{j-1} P_h^i < \xi_n(\omega) \leq \sum_{h=1}^{j} P_h^i$

$$Q_j^i=\mathbb{P}\Big(\underbrace{\sum_{h=1}^{j-1} P_h^i} < \xi_n < \underbrace{\sum_{h=1}^{j} P_h^i}\Big)=\sum_{h=1}^{j} P_h^i-\sum_{h=1}^{j-1} P_h^i=P_j^i$$





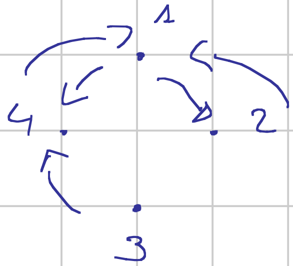
Esce Testa con probabilità p

esce croce con probabilità $1-p$

$S=\mathbb{Z}$

$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i)\neq 0$ se $j=i+1$ o se $j=i-2$

$0 \quad 1-p \quad 0 \quad 0 \quad p \quad 0 \quad 0$



$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = p$$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{diam}_1(K) = 2C = \max \|R_i - R_j\|_1 = 2$$

$$\delta_{12} = 2(1-p) + 2p = 2$$

$$P : x \longrightarrow x\underline{P}$$

PARAMETRI CARATTERISTICI DI UNA CATENA DI MARKOV OMOGENEA

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ catena di Markov omogenea su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ a valori in S finito o numerabile.

Fissato $C \subseteq S$ e $\omega \in \Omega$ definisco $t_C(\omega)$ come $\min\{n \geq 1 : X_n(\omega) \in C\}$

$t_C(\omega)$ si dice TEMPO DELLA PRIMA VISITA.

Se $X_0(\omega) \in C$ dico che ω parte da C.

Se $\nexists\, n \geq 1$ t.c. $X_n(\omega) \in C$ pongo $t_C(\omega) = +\infty$

$$t_C(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Fisso $k \in \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{P}(t_C = k)$

$$\{t_C = k\} = \{X_1 \notin C, X_2 \notin C \ldots X_{k-1} \notin C, X_k \in C\}$$

$$\mathbb{P}(t_C = k) = \mathbb{P}(X_1 \notin C, X_2 \notin C \ldots X_{k-1} \notin C, X_k \in C)$$

$\Rightarrow t_C$ è un tempo di rinnovo.

$$f_{iC}^{(k)} := \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i) \qquad \mathbb{P}(t_C = k) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(t_C = k, X_0 = i) =$$

$$= \sum_{i \in S} \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i)\, \mathbb{P}(X_0 = i) = \sum_{i \in S} f_{iC}^{(k)}\, \mathbb{P}(X_0 = i)$$

$$\mathbb{P}(t_C < +\infty) = \sum_{i \in S} \underbrace{\mathbb{P}(t_C < +\infty \mid X_0 = i)}_{f_{iC}}\, \mathbb{P}(X_0 = i)$$

$$f_{iC} := \mathbb{P}(t_C < +\infty \mid X_0 = i) =$$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{t_C = k\} \mid X_0 = i\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(t_C = k \mid X_0 = i)$$

$$\boxed{f_{iC} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{iC}^{(k)}}$$

$$f_{iC}^{(1)} = \mathbb{P}(X_1 \in C \mid X_0 = i) = \sum_{\ell \in C} \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = i)$$

$$f_{iC}^{(1)} = \sum_{\ell \in C} p_{i\ell}$$

$$f_{iC}^{(2)} = \mathbb{P}(X_2 \in C, X_1 \notin C \mid X_0 = i) =$$

$$= \sum_{\ell \notin C} \mathbb{P}(X_2 \in C, X_1 = \ell \mid X_0 = i) =$$

$$= \sum_{\ell \notin C} \mathbb{P}(X_2 \in C \mid X_1 = \ell)\, \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{\ell \notin C} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 \in C \mid X_0 = \ell)}\, \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = i)$$

$$f_{iC}^{(2)} = \sum_{\ell \notin C} f_{\ell C}^{(1)}\, p_{i\ell}$$

<u>Per induzione</u> $\quad f_{iC}^{(k)} = \sum_{\ell \notin C} f_{\ell C}^{(k-1)}\, p_{i\ell}$

$$E_k := \{\omega \in \Omega : X_k(\omega) \in C\}$$

$n \in \mathbb{N}$

$$V_C^{(n)}(\omega) := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{E_k}(\omega)$$ numero di visite in C durante i primi n passi

$$V_C(\omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_k}(\omega)$$ numero totale di visite in C

$C = \{j\}$ $\quad f^{(k)}_{i\{j\}} \quad f_{i\{j\}} \quad f^{(k)}_{ij} \quad f_{ij}$

$V^{(n)}_{\{j\}} \quad V_{\{j\}} \quad V^{(n)}_j \quad V_j$

$$\mathbb{P}(V_j \geq r \mid \underbrace{X_0 = i}) \underset{\text{no dim}}{=} f_{ij}\, f_{jj}^{r-1} \qquad \forall i,j \in S \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

X v.a. $\quad \mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega)} \int_\Omega \underline{\underline{X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)}}$

$$\mathbb{E}_i[V_j] = \frac{1}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \int_{\{X_0 = i\}} V_j(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

$\mathbb{E}[V_j \mid X_0 = i]$ NUMERO ATTESO DI VISITE IN j PARTENDO DALLO STATO i

$$\mathbb{E}_i[V_j] = \begin{cases} +\infty & \mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = i) > 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(V_j = k \mid X_0 = i) & \text{se } \mathbb{P}(V_j = +\infty \mid X_0 = i) = 0 \end{cases}$$

no dim

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{ij} = \begin{cases} +\infty & f_{jj} = 1, \\ \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} & f_{jj} < 1. \end{cases}$$

Se S è l'insieme degli stati di una catena di Markov omogenea e $j \in S$, dico che

1) j è uno STATO RICORRENTE se $\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{jj} = +\infty$
ovvero se $f_{jj} = 1$

2) j è uno STATO TRANSIENTE se $\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{jj} < +\infty$
ovvero se $f_{jj} < 1$

— o —

<u>PROP</u> Sono fatti equivalenti

1) j è ricorrente
2) I cammini che partono da j ritornano $\mathbb{P}$ q.c. in j
3) I cammini che partono da j ritornano $\mathbb{P}$ q.c. in j infinite volte.

Inoltre i cammini che partono da un qualsiasi stato i visitano j una volta con la stessa probabilità (f_{ij}) con cui visitano j infinite volte.

PROP Sono fatti equivalenti:

1) j è uno stato transiente
2) La probabilità f_{jj} che un cammino che parte da j visiti j è strettamente minore di 1.
3) La probabilità che un cammino che parte da j visiti j infinite volte è zero.

$$\mathbb{E}_i[t_C] = \mathbb{E}[t_C \mid X_0=i] := \frac{1}{\mathbb{P}(X_0=i)} \int_{\{X_0=i\}} t_C(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$= \begin{cases} +\infty & \mathbb{P}(t_C=+\infty \mid X_0=i)>0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} k\, \underbrace{\mathbb{P}(t_C=k \mid X_0=i)}_{f_{iC}^{(k)}} & \underbrace{\mathbb{P}(t_C=+\infty \mid X_0=i)=0}_{1-f_{iC}} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } f_{iC}<1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} k f_{iC}^{(k)} & \text{se } f_{iC}=1 \end{cases}$$

$C=\{j\}$ $\quad i=j \quad$ $\mathbb{E}_j[t_j] = \overline{T}_{jj}$

$$\overline{T}_{jj} = \begin{cases} +\infty & f_{jj}<1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)} & f_{jj}=1 \end{cases}$$

$$\overline{T}_{jj} = \begin{cases} +\infty & \text{se } j \text{ è transiente} \\ \sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)} & \text{se } j \text{ è ricorrente} \end{cases}$$

Se j è ricorrente e $\overline{T}_{jj}<+\infty$, dico che j è uno STATO POSITIVAMENTE RICORRENTE.

Si può dimostrare che $\mathbb{E}_i[t_C] \overset{\text{NO DIM}}{=} 1 + \sum_{l \notin C} p_{il}\, \mathbb{E}_l[t_C]$

PROP

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} \, p_{jj}^{(n-k)}$$

Se $\exists \lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} = w_j \Rightarrow w_j = \dfrac{1}{\overline{T}_{jj}}$

e $p_{ij}^{(n)} \to f_{ij} w_j$.

OSSERVAZIONE $w_j \neq 0$ sse j è positivamente ricorrente.