CATENE DI MARKOV

Titolo nota 11/12/2014

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ successione di v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

$\exists S$ insieme finito o numerabile, SPAZIO DEGLI STATI

t.c. $X_n : \Omega \to S \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(S = \{1, 2, \dots N\}, \{0, 1, \dots N\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z})$

$\pi(n) := (\pi(n)_i)_{i \in S} \qquad \pi(n)_i := \mathbb{P}(X_n = i)$

$P(n+1)$ MATRICE DI TRANSIZIONE AL PASSO n

$$P(n+1)^i_j = \begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) & \text{se } \pi(n)_i > 0 \\ \delta_{ij} & \text{se } \pi(n)_i = 0 \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ è una matrice stocastica.

Se conosco $\pi(0)$

$\pi(n)$

$$\pi(n+1) = \pi(n) P(n+1) = \pi(n-1) P(n) P(n+1)$$
$$= \pi(0) P(1) P(2) \dots \dots P(n+1)$$

Se la matrice di transizione non dipende da n, allora il PROCESSO STOCASTICO $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice OMOGENEO

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = j) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_{n+k} = j \mid X_{n+k-1} = i) \mathbb{P}(X_{n+k-1} = i)$$

$$= \sum_{i \in S} P^i_j \; \pi(n+k-1)_i = (\pi(n+k-1) P)_j$$

$$\pi(n+k) = \pi(n+k-1) P = \pi(n+k-2) P^2 = \dots$$
$$= \pi(k) P^n$$
$$= \pi(n) P^k$$

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = j \mid X_n = i) = (P^k)^i_j$$

DEF Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ un processo stocastico su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con spazio degli stati S finito o numerabile.

Dico che $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ha la PROPRIETÀ DI MARKOV se $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\forall i_0, i_1, i_2, \dots i_{n+1} \in S$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1 \dots X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n)$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$

Un processo stocastico che gode della proprietà di Markov si dice CATENA DI MARKOV

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una catena di Markov.

Sia $i \in S$ e sia $\boxed{F := \{X_n = i\}}$

Sia E un evento rilevato da $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots X_{n+k}$

Sia G un evento rilevato da $X_0, X_1, \dots X_{n-1}$

Allora $\boxed{\mathbb{P}(E \mid F \cap G) = \mathbb{P}(E \mid F)}$

DIM Per $n \in \mathbb{N}$ $i_n \in S$ $A_n = \{X_n = i_n\}$

$$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n \cap G) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)$$

G è rilevato da $X_0, X_1, \dots X_{n-1}$ $\Rightarrow$

G può essere scritto come unione disgiunta (finita o numerabile) di eventi del tipo

$$G_\alpha = \{X_0 = j_0, X_1 = j_1 \dots X_{n-1} = j_{n-1}\}$$

$$G = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha \quad \mathcal{A} \text{ finito o numerabile}$$

$$G_{\alpha_1} \cap G_{\alpha_2} = \emptyset$$

$$\underline{\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n \cap G)\, \mathbb{P}(A_n \cap G)} = \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n \cap G) =$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n \cap G_\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \underbrace{\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n \cap G_\alpha)\, \mathbb{P}(A_n \cap G_\alpha)}$$

$$= \sum_{\alpha \in a} \underbrace{\mathbb{P}(A_{n+1} | A_n)}\, \mathbb{P}(A_n \cap G_\alpha) = \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n) \sum_{\alpha \in a} \mathbb{P}(A_n \cap G_\alpha)$$

$$= \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n)\, \mathbb{P}(A_n \cap G)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n \cap G) = \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n)$$

2° PASSO $\mathbb{P}(A_{n+2} \cap A_{n+1} | A_n \cap G) = \dfrac{\mathbb{P}(A_{n+2} \cap A_{n+1} \cap A_n \cap G)}{\mathbb{P}(A_n \cap G)} =$

$$\frac{\mathbb{P}(A_{n+2} \cap A_{n+1} \cap A_n \cap G)}{\mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n \cap G)} \frac{\mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n \cap G)}{\mathbb{P}(A_n \cap G)} =$$

$$= \mathbb{P}(A_{n+2} | A_{n+1} \cap A_n \cap G)\, \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n \cap G)$$

$$= \mathbb{P}(A_{n+2} | A_{n+1})\, \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n)$$

$$\mathbb{P}(A_{n+k} \cap A_{n+k-1} \cap \dots \cap A_{n+2} \cap A_{n+1} | A_n \cap G) = \prod_{j=n}^{n+k-1} \mathbb{P}(A_{j+1} | A_j)$$

— o —

$$\boxed{\mathbb{P}(E | F \cap G) = \mathbb{P}(E | F)} \leftarrow$$

$$\mathbb{P}(E \cap F | G) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(E | F \cap G)\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(G)}$$

$$= \mathbb{P}(E | F)\, \mathbb{P}(F | G)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E \cap F | G) = \mathbb{P}(E | F)\, \mathbb{P}(F | G)}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = i_{n+k}, X_{n+k-1} = i_{n+k-1}, \dots, \overbrace{X_{n+1} = i_{n+1}}^{F} | \overbrace{X_n = i_n}^{G})$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+k} = i_{n+k}, X_{n+k-1} = i_{n+k-1} \dots \underbrace{X_{n+2} = i_{n+2}}_{F} | \underbrace{X_{n+1} = i_{n+1}}_{G}) \cdot$$

$$\cdot\, \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+k} = i_{n+k} | X_{n+k-1} = i_{n+k-1}) \dots \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

$$= P^{i_{n+k-1}}_{i_{n+k}} \cdot P^{i_{n+k-2}}_{i_{n+k-1}} \dots P^{i_n}_{i_{n+1}}$$

$$\mathbb{P}(X_k = i_{n+k}, X_{k-1} = i_{n+k-1} \dots X_1 = i_{n+1} | X_0 = i_n)$$

$$= \mathbb{P}(X_k = i_{n+k} | X_{k-1} = i_{n+k-1}) \dots \mathbb{P}(X_1 = i_{n+1} | X_0 = i_n)$$

$$P^{i_{n+k-1}}_{i_{n+k}}\, P^{i_{n+k-2}}_{i_{n+k-1}} \dots P^{i_n}_{i_{n+1}}$$

$$x_{k+1} = f(x_k) \qquad x_{k+1} = f(x_k)$$

$$x_0 = \bar{x} \qquad x_n = \bar{x}$$

$$x' = f(x) \qquad x' = f(x)$$
$$x(0) = \bar{x} \qquad x(a) = \bar{x}$$
$$x(t) \qquad x(t-a)$$

ESEMPIO DI PÓLYA

Urna contiene r palline rosse
b palline bianche.

Ad ogni passo $n \in \mathbb{N}_0$:
estraggo una pallina, la guardo, la reimbusso aggiungendo c palline dello stesso colore della pallina estratta.

Sia X_n la v.a. che indica il colore della pallina estratta al passo n.

$$S = \{B, R\}$$

$$\mathbb{P}(X_0 = B) = \frac{b}{b+r} \qquad \mathbb{P}(X_0 = R) = \frac{r}{b+r}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = B \mid X_1 = B) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = X_1 = B)}{\mathbb{P}(X_1 = B)} = ?$$

$$\mathbb{P}(X_1 = B) = \mathbb{P}(X_1 = B \mid X_0 = B)\mathbb{P}(X_0 = B) + \mathbb{P}(X_1 = B \mid X_0 = R)\mathbb{P}(X_0 = R)$$
$$= \frac{b+c}{b+r+c}\frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+c}\frac{r}{b+r} =$$
$$= \frac{b\,\cancel{(b+r+c)}}{(b+r)\cancel{(b+r+c)}} = \frac{b}{b+r}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = X_1 = B) = \mathbb{P}(X_2 = X_1 = X_0 = B) + \mathbb{P}(X_2 = X_1 = B, X_0 = R)$$
$$= \frac{b}{b+r} \cdot \frac{b+c}{b+r+c} \cdot \frac{b+2c}{b+r+2c} + \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b}{b+r+c} \cdot \frac{b+c}{b+r+2c}$$
$$= \frac{b(b+c)\cancel{(b+2c+r)}}{(b+r)(b+r+c)\cancel{(b+r+2c)}}$$

$$\mathbb{P}(X_2=B \mid X_1=B) = \frac{\cancel{b}(b+c)}{\cancel{(b+r)}(b+r+c)} \cdot \frac{\cancel{b+r}}{\cancel{b}} = \frac{b+c}{b+r+c}$$

$$\mathbb{P}(X_2=B \mid X_1=B, X_0=B) = \frac{\mathbb{P}(X_2=X_1=X_0=B)}{\mathbb{P}(X_0=X_1=B)}$$

$$\mathbb{P}(X_2=X_1=X_0=B) = \boxed{\frac{b}{b+r} \cdot \frac{b+c}{b+r+c} \cdot \frac{b+2c}{b+r+2c}}$$

$$\mathbb{P}(X_0=X_1=B) = \boxed{\frac{b}{b+r} \cdot \frac{b+c}{b+r+c}}$$

$$\mathbb{P}(X_2=B \mid X_1=B, X_0=B) = \frac{b+2c}{b+r+2c}$$

$$\frac{b+c}{b+r+c} = \frac{b+2c}{b+r+2c}, \quad b>0, \; r>0 \Rightarrow c=0$$

— o —

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ un processo stocastico su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Sia $T: \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$

T si dice un TEMPO DI RINNOVO per $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ se

se $\forall k \in \mathbb{N}_0$ $\quad \{T=k\}$ è rilevabile da

$X_0, X_1, \ldots, X_k$

— o —

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ CATENA DI MARKOV con spazio degli stati S (finito o numerabile)

Fisso $C \subseteq S$

Il tempo di attesa per visitare C

$$\min\{n \geq 1 : X_n(\omega) \in C\} = t_C(\omega)$$

Fisso $k \in \mathbb{N}$

$$\{t_C = k\} = \{X_k \in C, X_{k-1} \notin C \ldots X_1 \notin C\}$$

PROPRIETÀ DI MARKOV FORTE (NO DIM)

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov omogenea su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ con insieme degli stati S discreto.

Sia $T: \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ un tempo di rinnovo per $\{X_n\}$ "..." e sia $H \in \mathcal{E}$ tale che:

$\forall m \in \mathbb{N}_0$ $\quad H \cap \{T=m\}$ è rilevato da $X_0, X_1, \dots X_m$.

Allora $\forall i,j \in S$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathbb{P}(X_{T+n}=j \mid T<+\infty, X_T=i, H) = \mathbb{P}(X_n=j \mid X_0=i)$$

$$\{X_{T+n}=j, T<+\infty, X_T=i, H\} =$$

$$\{\omega\in\Omega : X_{T(\omega)+n}(\omega)=j,\ T(\omega)<+\infty,\ X_{T(\omega)}(\omega)=i,\ \omega\in H\}$$

TEOREMA (Costruzione di catene di Markov)

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

Sia S insieme finito o numerabile

Sia $X_0 : \Omega \to S$ v.a.

Sia $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ successione di v.a. a valori in $\mathbb{R}^N$.

Supponiamo che le ξ_n siano identicamente distribuite e che $X_0, \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ siano indipendenti

Sia $f : S\times\mathbb{R}^N \to S$ t.c.

$$\forall i\in S \quad f(i,\cdot) : \mathbb{R}^N \to S \text{ sia } \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\text{-misurabile}$$

$$g(x) = f(i,x)$$

Allora la successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definita per ricorrenza da

$$X_{n+1}(\omega) = f(X_n(\omega), \xi_n(\omega)) \quad n\geq 0$$

è una catena di Markov omogenea con

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = P^i_j = \mathbb{P}(f(i,\xi_n)=j)$$

DIM So che ξ_1 è indipendente da X_0

ξ_2 è indipendente da ξ_1 e X_0 $\Rightarrow$

ξ_2 è indipendente da $f(X_0, \xi_0) = X_1$

... ξ_n è indipendente da $X_0, \xi_1 \dots \xi_{n-1}, X_1 \dots X_{n-1}$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots X_0 = i_0) =$$

$$= \mathbb{P}(f(i_n, \xi_n) = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots X_0 = i_0)$$

$$= \mathbb{P}(f(i_n, \xi_n) = j)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n) = \mathbb{P}(f(i_n, \xi_n) = j \mid X_n = i_n) =$$

$$= \mathbb{P}(f(i_n, \xi_n) = j)$$