Titolo nota 09/12/2014

PROCESSI STOCASTICI A TEMPO DISCRETO

Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e supponiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ sia data una v.a. $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$.
Allora dico che la successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un processo stocastico reale.
Se $\exists S \subset \mathbb{R}$ t.c. $X_n(\Omega) \subseteq S$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dico che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un processo stocastico (a tempo discreto) in S.

$S = \{1, \dots N\}$ $\quad S = \mathbb{N}$, $\quad S = \mathbb{Z}$

$\forall i \in S \qquad \mathbb{P}(X_n = i) = \pi(n)_i$

$(\pi(n)_1 \;\; \pi(n)_2 \; \dots \; \pi(n)_N)$

$S = \mathbb{N}$ o $S = \mathbb{Z}$ $\qquad (\pi(n)_i)_{i\in S}$ successione delle densità

$\underline{P}(n) = (\underline{P}(n)^i_j)_{i,j\in S}$ MATRICE DI TRANSIZIONE AL PASSO n

$$\underline{P}(n+1)^i_j = \begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) & \mathbb{P}(X_n = i) > 0 \\ \delta^i_j & \mathbb{P}(X_n = i) = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) & \text{se } \pi(n)_i > 0 \\ \delta^i_j & \text{se } \pi(n)_i = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO $\quad \underline{P}(n)$ è una matrice stocastica.

$$\pi(n+1)_j = \mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i\in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i)$$

$$= \sum_{i\in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)\mathbb{P}(X_n = i) =$$

$$= \sum_{i\in S} \underline{P}(n+1)^i_j \, \pi(n)_i \quad = (\pi(n)\underline{P}(n+1))_j$$

$$\pi(n+1) = \pi(n)\underline{P}(n+1) = \pi(n-1)\underline{P}(n)\underline{P}(n+1) =$$
$$= \pi(n-2)\underline{P}(n-1)\underline{P}(n)\underline{P}(n+1) = \dots$$
$$= \pi(0)\underline{P}(1)\underline{P}(2)\dots\underline{P}(n+1)$$