Titolo nota 09/12/2014

MATRICI STOCASTICHE REGOLARI 2

(X, d) spazio metrico

$f : X \to X$ continua

Punto $p \in X$ si dice punto di f se

$$\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = p \quad \forall x \in X$$

Pto fisso $p \in X$ se $f(p) = p$

TEOREMA DI BROUWER

(X, d) compatto convesso $f : X \to X$ continua

$\Rightarrow$ $\exists$ almeno un pto fisso di f

$f : X \to X$ si dice CONTRAZIONE se $\exists\, L \in [0, 1)$

t.c. $d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y) \quad \forall x, y \in X$

TEOREMA DI BANACH

Se (X, d) spazio metrico completo e f è una contrazione in X $\Rightarrow$ f ammette un punto

$$d(f^n(x), p) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(f(x), x) \quad \forall x \in X$$

$$d(f^n(x), p) \leq L^n\, d(f(x), p) \quad \forall x \in X$$

COROLLARIO Sia (X, d) spazio metrico completo con diametro finito e sia $f : X \to X$ continua. Se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. f^n è una contrazione in X con fattore di contrazione $L \in (0,1)$, allora f ha un punto $p \in X$

$$d(f^k(x), p) \leq L^{\left[\frac{k}{n}\right]} \operatorname{diam}(X)$$

DIM f^n è una contrazione $\Rightarrow$ f^n ammette un punto $p \in X$

$k \in \mathbb{N} \quad k = qn + r \quad r \in 0, 1, \ldots, n-1 \quad q \in \mathbb{N}$

$$d(f^k(x), p) = d(f^{qn+r}(x), p) = d((f^{n})^{q}(f^r(x)), p)$$
$$\leq L^q \, d(f^r(x), p) \leq L^{\lfloor k/n \rfloor} \operatorname{diam}(X)$$

$\mathcal{J}$ = insieme dei vettori stocastici di $\mathbb{R}^{N*}$

$\underline{P} \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ matrice stocastica

$\underline{P} : x \in \mathcal{J} \longmapsto x\underline{P} \in \mathcal{J}$

$\mathcal{J}$ è convesso e compatto

Ogni applicazione lineare in $\mathbb{R}^{N*}$ è continua

$\Rightarrow$ per il Teo di Brouwer l'applicazione $\underline{P}$ ammette almeno un pto fisso:

$$\exists \, w \in \mathcal{J} \text{ t.c. } w\underline{P} = w$$

(TEOREMA DI PERRON-FROBENIUS)

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{P} = Id$$

MATRICI STOCASTICHE REGOLARI

Una matrice stocastica $\underline{P} \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ si dice REGOLARE se

$$\exists \, k_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } p_{ij}^{(k_0)} > 0 \quad \forall i,j = 1, \ldots N$$

$$x = (x_1 \ldots x_N) \in \mathbb{R}^{N*}$$

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$

$$\|x\|_1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{N*}$$

$$\|x\|_1 = 0 \Rightarrow x_i = 0 \ \forall i = 1 \ldots N \quad x = 0_{\mathbb{R}^{N*}}$$

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{N} |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_1$$

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i| + |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Si può dimostrare che

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{N} \, \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{N*}$$

$N=1$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2} = |x_1| = \|x\|_1$

$N=2$ $\quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{(|x_1| + |x_2|)^2}$

$= |x_1| + |x_2| = \|x\|_1$

$\|x\|_1^2 = (|x_1| + |x_2|)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1||x_2| \leq (*)$

$0 \leq (a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$

$\mp 2ab \leq a^2 + b^2 \qquad |2ab| \leq a^2 + b^2$

$(*) \leq x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 = 2\|x\|_2^2$

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{2}\, \|x\|_2$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{N}\, \|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{N}$$

Se $A \subset \mathbb{R}^N$ è compatto $\Rightarrow (A, d_2)$ è uno spazio metrico completo

distanza euclidea

$\Rightarrow \forall A \subset \mathbb{R}^N$ compatto $\Rightarrow$ anche (A, d_1) è ancora uno spazio metrico completo

$d_1(x,y) := \|x-y\|_1$

DIM Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in (A, d_1)

$d_2(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|_2$

$\|x_n - x_m\|_2 \leq \|x_n - x_m\|_1 \leq \sqrt{N}\, \|x_n - x_m\|_2$

$\Rightarrow \{x_n\}$ è di Cauchy secondo la metrica d_2

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in A$ t.c. $d_2(x_n, \bar{x}) \to 0$

$d_1(x_n, \bar{x}) \leq \sqrt{N}\, d_2(x_n, \bar{x}) \to 0$

$\Rightarrow \{x_n\}$ converge in (A, d_1)

$(X, d) \qquad (X, \tilde{d})$

$c_1, c_2 > 0 \qquad c_1 \|x\|_d \leq \|x\|_{\tilde{d}} \leq c_2 \|x\|_d \quad \forall x \in X$

$(\mathcal{Y}, d_1)$ è uno spazio metrico completo

¿ $\underline{P} : x \in \mathcal{Y} \mapsto x\underline{P} \in \mathcal{Y}$ è una contrazione ?

Supponiamo di avere uno sp. vettoriale V

e siano $v_1, \dots, v_n \in V$

Chiamo INVILUPPO CONVESSO di $v_1 \dots v_n$ e indico $co\{v_1 \dots v_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1 \dots n, \ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$

<u>PROP</u> Sia $\underline{P} \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ matrice stocastica

e siano $R^1, R^2, \dots, R^N$ le sue righe ($R^i \in \mathcal{Y} \ \forall i = 1 \dots N$)

e sia $K := co\{R^1, R^2, \dots, R^N\}$

$$C := \frac{1}{2} \max_{i,j=1,\dots N} \| R^i - R^j \|_1$$

<u>Allora</u> 1) $C \leq 1$

2) $2C = diam_1(K)$

3) Se $x, y \in \mathcal{Y} \Rightarrow \| P(x) - P(y) \|_1 \leq C \| x - y \|_1$

4) Se gli elementi p_{ij} di $\underline{P}$ sono <u>tutti</u> nonnulli, allora $C < 1$.

<u>DIM</u> 1) $\| R^i - R^j \|_1 \leq \| R^i \|_1 + \| R^j \|_1 = 2$

$\Rightarrow \max_{i,j=1 \dots N} \| R^i - R^j \|_1 \leq 2 \Rightarrow C \leq 1$.

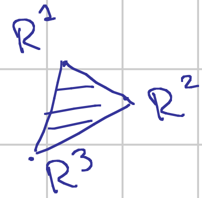
2) $diam_1(K) = \sup_{x,y \in K} \| x - y \|_1 \geq \| R^i - R^j \|_1 \ \forall i, \forall j$

$\Rightarrow diam_1(K) \geq 2C$

Per $x \in \mathbb{R}^{N*}$ e $r > 0$ $B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^{N*} : \| x - y \|_1 \leq r \}$

$\forall i, \forall j \quad R^i \in B(R^j, 2C)$

Poiché $B(R^j, 2C)$ è convesso e contiene tutte le righe $R^1 \dots R^N$



$\Rightarrow \ co\{R^1 \_\_ R^N\} \subset B(R^j, 2C)$

cioè $K \subset B(R^j, 2C)$

$\forall x \in K$ e $\forall j = 1 \_ N$

$\|x - R^j\|_1 \leq 2C$

$R^j \in B(x, 2C) \quad \forall j = 1 \_ N \quad \forall x \in K$

$\Rightarrow K \subset B(x, 2C) \quad \forall x \in K$

$\forall y \in K \quad \|y - x\|_1 \leq 2C \quad \Rightarrow \sup_{x, y \in K} \|x - y\|_1 \leq 2C$

cioè $diam_1(K) \leq 2C$

3) $\|P(x) - P(y)\|_1 \leq C\|x - y\|_1 \quad \forall x, y \in \mathcal{Y}$

1° PASSO $\quad a \in \mathbb{R}^{N*} \quad \sum_{i=1}^{N} a_i = 0 \quad \|a\|_1 = 2$

$a^+ = \sum_{a_i > 0} a_i \qquad a^- = \sum_{a_i < 0} a_i$

$0 = \sum_{i=1}^{N} a_i = a^+ + a^-$

$2 = \sum_{i=1}^{N} |a_i| = \sum_{a_i > 0} a_i + \sum_{a_i < 0} -a_i = a^+ - a^-$

$\begin{cases} a^+ + a^- = 0 \\ a^+ - a^- = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^+ = 1 \\ a^- = -1 \end{cases}$

$\beta' = \sum_{a_i > 0} a_i R^i \in K$

$\beta'' = \sum_{a_i < 0} (-a_i) R^i \in K$

$\|P(a)\|_1 = \|aP\|_1 = \|\sum_{i=1}^{N} a_i R^i\|_1 =$

$= \|\sum_{a_i > 0} a_i R^i + \sum_{a_i < 0} a_i R^i\|_1 = \|\beta' - \beta''\|_1 \leq diam_1(K)$

$= 2C = C\|a\|_1 \quad \Rightarrow \|P(a)\|_1 \leq C\|a\|_1$ se $\sum a_i = 0$

2° PASSO $\quad x, y \in \mathcal{Y} \quad a := x - y \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i) = 1 - 1 = 0$

$\|P(a)\|_1 = \|P(x) - P(y)\|_1$

$\|P(x) - P(y)\|_1 \leq C\|x - y\|_1 \quad \forall x, \forall y \in \mathcal{Y}$

4) $P_{ij} = P_j^i > 0 \quad \forall i, \forall j \overset{?}{\Rightarrow} C < 1$

$x, y \in \mathcal{Y} \quad x = (x^1 \ldots x^N) \quad y = (y^1 \ldots y^N) \quad \|x - y\|_1 = 2$

$$2 = \|x - y\|_1$$
$$\|x\|_1 + \|y\|_1$$

$$A = \{ i \in \{1 \ldots N\} : x_i > y_i \}$$
$$B = \{ i \in \{1 \ldots N\} : x_i \le y_i \} = \{1 \ldots N\} \setminus A$$

Voglio provare che A e B sono entrambi non vuoti

1) Supponiamo che A sia vuoto $\forall i = 1 \ldots N \; x_i \le y_i$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^N x_i \le \sum_{i=1}^N y_i = 1 \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^N (y_i - x_i) = 0$$

$$\Rightarrow x_i = y_i \; \forall i = 1 \ldots N \quad \Rightarrow x = y$$

2) Supponiamo che B sia vuoto $\forall i = 1 \ldots N \; x_i > y_i$

$$1 = \sum_{i=1}^N x_i > \sum_{i=1}^N y_i = 1 \qquad 1 > 1 \quad \text{ASSURDO}$$

2° PASSO

$$x, y \in \mathcal{Y} \quad \|x - y\|_1 = 2$$
$$x_i \ge 0 \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1$$
$$y_i \ge 0 \quad \sum_{i=1}^N y_i = 1$$

$$2 = \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N y_i \qquad 2 = \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|$$

$$2 = \sum_{i \in A} (x_i - y_i) + \sum_{i \in B} (y_i - x_i)$$

$$\sum_{i \in A} x_i + \sum_{i \in B} x_i = 1 \qquad \boxed{\sum_{i \in A} x_i = 1 - \sum_{i \in B} x_i}$$

$$\sum_{i \in A} y_i + \sum_{i \in B} y_i = 1 \qquad \boxed{\sum_{i \in B} y_i = 1 - \sum_{i \in A} y_i}$$

$$\cancel{2} = \cancel{1} - \sum_{i \in B} x_i - \sum_{i \in A} y_i + \cancel{1} - \sum_{i \in A} y_i - \sum_{i \in B} x_i$$

$$\sum_{i \in B} x_i + \sum_{i \in A} y_i = 0 \qquad x_i = 0 \; \forall i \in B$$
$$y_i = 0 \; \forall i \in A$$

3° PASSO Se C fosse $= 1 \Rightarrow$ esisterebbero due righe R^i e R^j t.c. $\|R^i - R^j\|_1 = 2$
$\Rightarrow$ sia R^i che R^j avrebbero alcune componenti uguali a 0 che invece per ipotesi è falso.

TEOREMA Sia $\underline{P} \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ matrice stocastica.
Sono equivalenti i seguenti fatti:
1) $\underline{P}$ è regolare
2) $\underline{P}$ è irriducibile e la mappa $P: x \in \mathcal{J} \mapsto x\underline{P} \in \mathcal{J}$ ha un posto $w \in \mathcal{J}$
3) $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ la matrice $\underline{P}^n$ ha tutti gli elementi strettamente positivi

In tal caso 1) la mappa P ha un unico punto fisso cioè il suo posto w;
2) tutte le componenti del posto sono strettamente positive
3) Se $n \geq \bar{n}$ e $R^1 \ldots R^N$ le righe di $\underline{P}^{\bar{n}}$ $\Rightarrow C < 1$
$$\|x\underline{P}^n - w\|_1 \leq C^{\lfloor n/\bar{n} \rfloor} \operatorname{diam} \mathcal{J}$$

DIM $1 \Rightarrow 2$ Sia k_0 t.c. $(\underline{P}^{k_0})^i_j > 0$
Se $C_{k_0} := \frac{1}{2} \max_{i,j} \|R^i - R^j\|_1$ R^i, R^j righe di $\underline{P}^{k_0}$
so che $C_{k_0} < 1$.
$P^{k_0}: \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ è una contrazione
$\Rightarrow P: \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ ha un posto e dunque un unico pto fisso
$$\|x\underline{P}^n - w\| \leq C^{\lfloor n/k_0 \rfloor} 2$$
Si può dimostrare che tutte le componenti di w sono positive

$2 \Rightarrow 3$ $P^n(x) = x\underline{P}^n \to w$ $\forall x \in \mathcal{J}$ $w = (w^1, \ldots w^N)$ $w^i > 0$

Scelgo $x = e^i$ $\quad e^i P^n \to w$

cioè la riga i-esima di P^n converge a w

Poiché tutte le componenti di w sono positive,

$\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ tutte le righe di P^n hanno tutte le componenti positive.

$3 \Rightarrow 1$ OVVIO.

Supponiamo $\underline{P}$ regolare e sia $w \in \mathcal{J}$ il suo unico punto

Considero

$$W = \begin{pmatrix} w \\ w \\ \vdots \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_N \\ w_1 & w_2 & \dots & w_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_1 & w_2 & \dots & w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (w_1 \dots w_N)$$

$x\underline{P}^n \to w \qquad \underline{P}^n \to \underline{W}$

$\| x P^{\lfloor n/\bar{n} \rfloor} - w \|_1 \leq C^{\lfloor n/\bar{n} \rfloor}\, 2 \qquad \| \underline{P}^n - \underline{W} \|_\infty \leq 2\, C^{\lfloor n/\bar{n} \rfloor}$

$w\underline{P} = w \qquad \underline{W}\underline{P} = \underline{W}$

$$\underline{W} = \underline{W}^2 = \underline{W}\underline{P} = \underline{P}\,\underline{W}$$

MATRICI STOCASTICHE E AUTOVALORI

PROP Sia $\underline{P} \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ matrice stocastica $\Rightarrow$

1 è autovalore di $\underline{P}$ e $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore relativo ad 1.

Ogni autovalore di $\underline{P}$ ha modulo ≤ 1.

DIM (1) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{P}v$

$$(\underline{P}v)_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 = v_i \quad \forall i = 1 \dots N$$

$\Rightarrow \underline{P}v = \underline{v}$

(2) Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di $\underline{P}$ $\Rightarrow \exists z$ autovettore.

Sia $k_0 \in \{1 \dots N\}$ t.c. la componente k_0-esima di z è quella di modulo massimo

$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \qquad k_0 : |z_{k_0}| = \max\{|z_i| \;\; i = 1 \dots N\}$

$$|\lambda z_{k_0}| = |Pz|_{k_0} = \left| \sum_{j=1}^{N} p_{k_0 j} z_j \right| \leq$$

$$\le \sum_{j=1}^{N} p_{k_0 j} |z_j| \le \sum_{j=1}^{N} p_{k_0 j} |z_{k_0}| = |z_{k_0}|$$

$$|\lambda| \cdot |z_{k_0}| \le |z_{k_0}| \quad \Rightarrow |\lambda| \le 1 \qquad \boxtimes$$

<u>TEO</u> Se $P \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ è matrice stocastica

NO DIM regolare $\Rightarrow$ 1 è l'unico autovalore di modulo 1 e ha molteplicità algebrica (e geometrica) uguale ad 1.

$\underline{P}$ regolare e sia S il cambiamento di base t.c. $\underline{P} = SJS^{-1}$ con J di Jordan

$\Rightarrow \underline{P}^n = SJ^nS^{-1}$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & - & - \\ 0 & \boxed{J_1} & & \\ | & & \boxed{J_2} & \\ | & & & \ddots \\ | & & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix} \qquad J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_i^n \to (0)$$

$$J^n \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{O_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} =: K$$

$$(P^n)^i_j \to (SKS^{-1})^i_j$$

La prima colonna di S è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(SK)^i_j = \sum_{r=1}^{N} S^i_r K^r_j$$

$j \neq 1 \quad (SK)^i_j = 0$

$j = 1 \quad (SK)^i_1 = S^i_1 = 1$

$$(SKS^{-1})^i_j = \sum_{r=1}^{N} (SK)^i_r (S^{-1})^r_j = (S^{-1})^1_j$$

$w_j := (S^{-1})^1_j \qquad \omega = (\omega_1 - \omega_N)$

$$W = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ \vdots \\ \omega \end{pmatrix}$$

$\forall \varepsilon > 0$

$$\| J^n - \Pi \| \leq C_\varepsilon (\lambda_* + \varepsilon)^n \qquad \lambda_* = \max\{|\lambda_i| \ \lambda_i \neq 1\}$$

— o —

TEOREMA ~~NO DIM~~ Sia S finito o numerabile e sia P una matrice stocastica indicizzata da S.

Supponiamo che $\exists\ w = (w_j)_{j\in S}$ t.c.

$$\forall i \in S \ \forall j \in S \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = w_j$$

Allora 1) $w_j \geq 0 \quad \forall j \in S \quad \sum_{j\in S} w_j \leq 1$

2) $w = (w_j)_{j\in S}$ è un pto fisso di $P: x \in \ell^1 \mapsto xP \in \ell^1$

e se esiste un altro $z = (z_j)_{j\in S}$ tale che $z_j \geq 0 \quad \sum_{j\in S} z_j < +\infty$ e che sia punto fisso della mappa P, allora $\exists \lambda \geq 0$ t.c. $z = \lambda w$.

3) Se S è finito $\Rightarrow w$ è l'unico vettore stocastico che sia pto fisso di $P: \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$.