# MATRICI STOCASTICHE REGOLARI

$(X,d)$ spazio metrico

$f : X \to X$ funzione continua

$f^0(x) = x \quad \forall x \in X \quad f^0 = id$

$f^1(x) = f(x)$

$k \geq 2 \qquad f^k(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ volte}}(x) \qquad \forall x \in X$

$\forall x \in X \qquad \{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ si dice CAMMINO in $x$.

Un punto $p \in X$ si dice un PUNTO FISSO DI $f$ se $f(p) = p$

$\Rightarrow$ Se $p$ è un pto fisso di $f \Rightarrow$ il cammino di $p$ è la successione costante che vale sempre $p$.

Un pto $p \in X$ si dice un POZZO DI $f$ se

$$\lim_{k \to \infty} f^k(x) = p \qquad \forall x \in X$$

<u>PROP</u>

i) Se $p$ è un pto fisso di $f \Rightarrow f^{(k)}(p) = p \ \forall k \in \mathbb{N}$

ii) Se $n \geq 1$ e $p$ è un pto fisso per $f^n$, allora $p, f(p) \dots f^{n-1}(p)$ sono punti fissi per $f^n$

In particolare, se $f^n$ ha un unico pto fisso $p$ $\Rightarrow$ $p$ è anche l'unico pto fisso di $f, f^2 \dots f^{n-1}$

iii) Se $p$ è un pozzo di $f$, allora $p$ è l'unico pozzo e $p$ è anche l'unico punto fisso di $f$

iv) Esistono mappe che hanno un unico punto fisso ma non hanno pozzo

$X = [-1, 1] \qquad f(x) = -x$

$d$ = distanza euclidea

$x = 0$ è l'unico punto fisso

$f^k(x) = (-1)^k x$

v) Se $n \geq 1 \Rightarrow p \in X$ è il p.to fisso di $f$ sse $p$ è il p.to fisso di $f^n$.

DIM per esercizio

## TEOREMA DI BROUWER

Sia $(X, d)$ sia compatto e convesso e sia $f : X \to X$ continua.

Allora $f$ ammette <u>almeno</u> un p.to fisso.

DIM solo nel caso lineare

$x \in X \subseteq \mathbb{R}^N$ $\quad \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(x) =$

$= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f^k(x) \qquad \lambda_k = \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow w_n$ è c.l.c. di $x \in X, f(x) \in X \ldots f^n(x) \in X$

$\Rightarrow w_n \in X$ perché $X$ è convesso.

Ma $X$ è compatto $\Rightarrow \exists \overline{w} \in X$ ed esiste una successione $\{w_{k_n}\}$ estratta da $\{w_n\}$ t.c.

$$\lim_{n\to\infty} w_{k_n} = \overline{w}$$

Voglio provare che $\overline{w}$ è un p.to fisso di $f$

$$|f(w_{k_n}) - w_{k_n}| = \left| f\left(\frac{1}{k_n+1}\sum_{i=0}^{k_n} f^i(x)\right) - \frac{1}{k_{n}+1}\sum_{i=0}^{k_n} f^i(x)\right|$$

$$= \frac{1}{k_n+1}\left|\sum_{i=0}^{k_n} f^{i+1}(x) - \sum_{i=0}^{k_n} f^i(x)\right| =$$

$$= \frac{1}{k_n+1}\left|f^{k_n+1}(x) - x\right| \leq \frac{\operatorname{diam}(X)}{k_n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |f(w_{k_n}) - w_{k_n}| = 0$$

$$= |f(\overline{w}) - \overline{w}| \qquad \Rightarrow \overline{w} = f(\overline{w}) \qquad \boxtimes$$

## CONTRAZIONI

Sia $(X,d)$ spazio metrico e sia $f: X \to X$

$f$ si dice una contrazione di $X$ se $\exists L \in [0,1)$

t.c. $\quad d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$

$L$ si dice FATTORE DI CONTRAZIONE DI $f$.

## TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia $(X,d)$ spazio metrico completo

Sia $f: X \to X$ una contrazione con fattore di contrazione $L \in (0,1)$.

Allora $f$ ha un punto

In particolare $d(f^n(x), p) \leq \dfrac{L^n}{1-L} d(f(x), x) \quad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Inoltre

$$d(f^n(x), p) \leq L^n\, d(f(x), p) \quad \forall x \in X$$

DIM 1) Dimostro che se $f$ ammette un pto fisso, allora questo è l'unico.

Siano $p, q \in X$ due pti fissi

$$d(p,q) = d(f(p), f(q)) \leq L\, d(p,q)$$

$$\underbrace{(1-L)}_{>0}\, d(p,q) \leq 0 \implies d(p,q) = 0 \implies p = q$$

2) $x \in X \qquad f^k(x) = x_k \in X$

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f^{k+1}(x), f^k(x)) =$$
$$= d(f(f^k(x)), f(f^{k-1}(x)))$$
$$\leq L\, d(f^k(x), f^{k-1}(x)) \leq$$
$$\leq L \cdot L\, d(f^{k-1}(x), f^{k-2}(x)) \leq \dots \quad (\star)$$
$$\leq L^k\, d(f(x), x)$$

$q, p \in \mathbb{N} \quad q > p$

$$d(x_q, x_p) \leq \sum_{k=p}^{q-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=p}^{q-1} L^k d(f(x), x) = \qquad k = p+s$$

$$= d(f(x), x) \sum_{s=0}^{q-1-p} L^p L^s = L^p d(f(x), x) \sum_{s=0}^{q-1-p} L^s$$

$$\leq L^p d(f(x), x) \sum_{s=0}^{\infty} L^s = \frac{L^p}{1-L} d(f(x), x)$$

$\forall q, p \in \mathbb{N} \quad q > p \qquad d(x_q, x_p) \leq \frac{L^p}{1-L} d(f(x), x)$

$\Rightarrow \{x_k\}$ è una successione di Cauchy in $X$

Ma $X$ è completo $\Rightarrow \{x_k\}$ è una successione convergente in $X$.

Pongo $p(x) = \lim_{k \to \infty} x_k$

Foccamo vedere che $p(x)$ è un pto fisso di $f$

Ripartiamo da $(\star)$ che posso scriver come

$$d(f(x_k), x_k) \leq L^k d(f(x), x)$$

Quando $k \to \infty \qquad x_k \to p(x)$ e, per continuità $\quad f(x_k) \to f(p(x)) \Rightarrow$

$$0 \leq d(f(p(x)), p(x)) \leq \lim_k L^k d(f(x), x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(p(x)) = p(x)$$

cioè $p(x)$ è pto fisso di $f$

Ma abbiamo dimostrato che non può esistere più di un pto fisso $\Rightarrow p(x)$ non dipende da $x$: $p(x) \equiv p \quad \forall x \in X$

Riconsideriamo la def di contrazione

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

scelgo $y = p \Rightarrow$

$$d(f^n(x), p) = d(f^n(x), f^n(p)) \leq$$

$$\leq L\, d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(p)) \leq L^2 d(f^{n-2}(x), f^{n-2}(p))$$

$$\leq \ldots \leq L^n d(f^0(x), f^0(p)) = L\, d(x, p)$$

$$\boxtimes$$