MATRICI STOCASTICHE 2

Titolo nota 05/12/2014

$S = \{1 \ldots N\}$ o S numerabile $\qquad = (\underline{P}^n)^i_j$

$i, j \in S \qquad i \to j$ se $\exists\, n \in \mathbb{N} : p^{(n)}_{ij} > 0$

$i, j \in S \qquad i \leftrightarrow j$ se $i \to j$ e $j \to i$

$\forall\, i, j \in S \qquad i \leftrightarrow j$, $\underline{P}$ si dice IRRIDUCIBILE

PROPRIETÀ La relazione "$i \leftrightarrow j$" è una relazione di equivalenza in S.

DIM 1) $i \leftrightarrow i \qquad \underline{P}^0 = Id \qquad p^{(0)}_{ii} = \delta_{ii} = 1$

2) $i \leftrightarrow j \iff j \leftrightarrow i$

$i \leftrightarrow j \qquad \exists\, n, m \in \mathbb{N}_0 \quad p^{(n)}_{ij} > 0 \qquad p^{(m)}_{ji} > 0$

3) $i \leftrightarrow j,\ j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$

$i \leftrightarrow j \qquad \exists\, n_1, m_1 \in \mathbb{N}_0 \quad p^{(n_1)}_{ij} > 0 \qquad p^{(m_1)}_{ji} > 0$

$j \leftrightarrow k \qquad \exists\, n_2, m_2 \in \mathbb{N}_0 \quad p^{(n_2)}_{jk} > 0 \qquad p^{(m_2)}_{kj} > 0$

$$p^{(n_1+n_2)}_{ik} = (\underline{P}^{n_1+n_2})^i_k = \sum_{l \in S} p^{(n_1)}_{il}\, p^{(n_2)}_{lk} \geq p^{(n_1)}_{ij}\, p^{(n_2)}_{jk} > 0 \qquad i \to k$$

$$p^{(m_1+m_2)}_{ki} = \underbrace{(\underline{P}^{m_1+m_2})^k_i}_{= \underline{P}^{m_2} \cdot \underline{P}^{m_1}} = \sum_{l \in S} p^{(m_2)}_{kl}\, p^{(m_1)}_{li} \geq p^{(m_2)}_{kj}\, p^{(m_1)}_{ji} > 0 \qquad k \to i$$

$\Rightarrow \exists$ una partizione $A_1 \ldots A_r$ di S t.c.

$\forall\, i, j \in S$: se $i \leftrightarrow j \Rightarrow i$ e j appartengono allo stesso insieme della partizione

se $i \not\leftrightarrow j \Rightarrow i$ e j appartengono a insiemi diversi della partizione.

— o —

CLASSE CHIUSA o CLASSE ASSORBENTE

Sia S insieme degli stati (finito o numerabile) e sia C un sottoinsieme non vuoto di S

Dico che C è una classe assorbente o chiusa se $\forall i \in C$ e $\forall j \notin C$ $i \not\to j$

ovvero $\forall i \in C$ se $i \to j \Rightarrow j \in C$

CARATTERIZZAZIONE DEGLI STATI

Sia $\underline{P}$ una matrice stocastica indicizzata da S insieme finito o numerabile e sia $j \in S$.

Dico che j è uno STATO RICORRENTE se $\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)} = +\infty$

Dico che j è uno STATO TRANSIENTE se $\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)}$ converge

PROP Sia $\underline{P}$ matrice stocastica indicizzata da S finito o numerabile.

1) Se $i \to j$ e j è ricorrente $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)} = +\infty$

2) Se $i \leftrightarrow j$, allora sono o entrambi ricorrenti o entrambi transienti

DIM 1) So che $i \to j \Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{N}$ t.c. $p_{ij}^{(l)} > 0$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$p_{ij}^{(k+l)} = (\underline{P}^{k+l})^{i}_{j} = \sum_{r \in S} p_{ir}^{(l)} p_{rj}^{(k)} \geq p_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(k)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(k+l)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(k)} = \underbrace{p_{ij}^{(l)}}_{>0} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)} = +\infty$$

2) $i \leftrightarrow j$ $\exists\, l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ $p_{ij}^{(l_1)} > 0$ $p_{ji}^{(l_2)} > 0$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$p_{ii}^{(l_1+k+l_2)} = (\underline{P}^{l_1} \cdot \underline{P}^{k} \cdot \underline{P}^{l_2})^{i}_{i} = \sum_{r \in S} \sum_{s \in S} p_{ir}^{(l_1)} p_{rs}^{(k)} p_{si}^{(l_2)}$$

$$\geq p_{ij}^{(l_1)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(l_2)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(l_1+k+l_2)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(l_1)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(l_2)} =$$

$= \underset{>0}{p_{ij}^{(l_1)}} \; \underset{>0}{p_{ji}^{(l_2)}} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)}$

$\Rightarrow$ Se j è ricorrente $\Rightarrow$ anche i è ricorrente

Se i è transiente $\Rightarrow$ anche j è transiente ☒

$S = \{1, \dots N\}$

$\underline{P} \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ matrice stocastica.

Se $i, j \in S$ e $i \to j$ $\Rightarrow \exists$ un cammino composto da al più $N-1$ archi che va da i a j

SSE $(Id + \underline{P} + \underline{P}^2 + \dots + \underline{P}^{N-1})_{ij} > 0$

S è una classe chiusa di S

C, D classi chiuse di $S \Rightarrow$ ¿ $C \cup D$ è una classe chiusa?

$i \in C \cup D \quad j \notin C \cup D$

Se $i \in C \Rightarrow i \not\to j$ perché $j \notin C \cup D \Rightarrow j \notin C$

Analogo se $i \in D$

¿ $C \cap D$ è una classe chiusa?

$i \in C \cap D \quad j \notin C \cap D$

Poiché $i \in C \Rightarrow i \to j$ SSE $j \in C$ cioè SSE $j \in C \cap D$

$i \in D \Rightarrow i \to j$ SSE $j \in D$

$\Rightarrow i \not\to j$

Dico che una classe chiusa C è una CLASSE CHIUSA MINIMALE se $\nexists D \subset S$, $D \neq \emptyset$ e $D \subsetneq C$ che sia anch'esso una classe chiusa

ovvero

C classe chiusa minimale

$\tilde{C} \neq C$ classe chiusa

Considero $D := \tilde{C} \cap C \Rightarrow D$ è una classe chiusa

Però $\tilde{C} \neq C \Rightarrow D \subsetneq C \Rightarrow D = \emptyset$

PROP Una classe chiusa C è minimale sse tutti gli stati appartenenti a C comunicano tra di loro

DIM 1) Sia C una classe chiusa i cui stati comunicano tra di loro.

Sia $D \neq \emptyset$ $D \subsetneq C$. Supponiamo che D sia una classe chiusa. Prendo $i \in D$ e $j \in C \setminus D$. Poiché D è una classe chiusa $i \not\to j$ cioè $i \not\leftrightarrow j$. Questo è assurdo perché contraddice l'ipotesi.

2) Supponiamo che C sia una classe chiusa minimale. Per assurdo supponiamo che

$\exists i, j \in C$ t.c. $i \not\to j$

Sia $D := \{k \in C \text{ t.c. } k \not\to j\}$

$\Rightarrow i \in D \Rightarrow D \neq \emptyset$

¿ D è una classe chiusa?

Se $i \in D$ $k \notin C \Rightarrow i \not\to k$ perché C è classe chiusa

se $i \in D$ e $k \in C \setminus D \Rightarrow$ ¿ $i \to k$?

Se $i \to k \to j \Rightarrow i \to j$ ASSURDO

$\Rightarrow$ D è una classe chiusa strettamente contenuta in C

ASSURDO perché C è una classe chiusa minimale

— o —

$S = \{1 \ldots N\}$

$i \to j$ sse $(Id + P + P^2 + \dots + P^{N-1})_{ij} > 0$

sse $(Id + \underline{P} + \underline{P}^2 \dots \underline{P}^{N-1})_{ij} > 0$

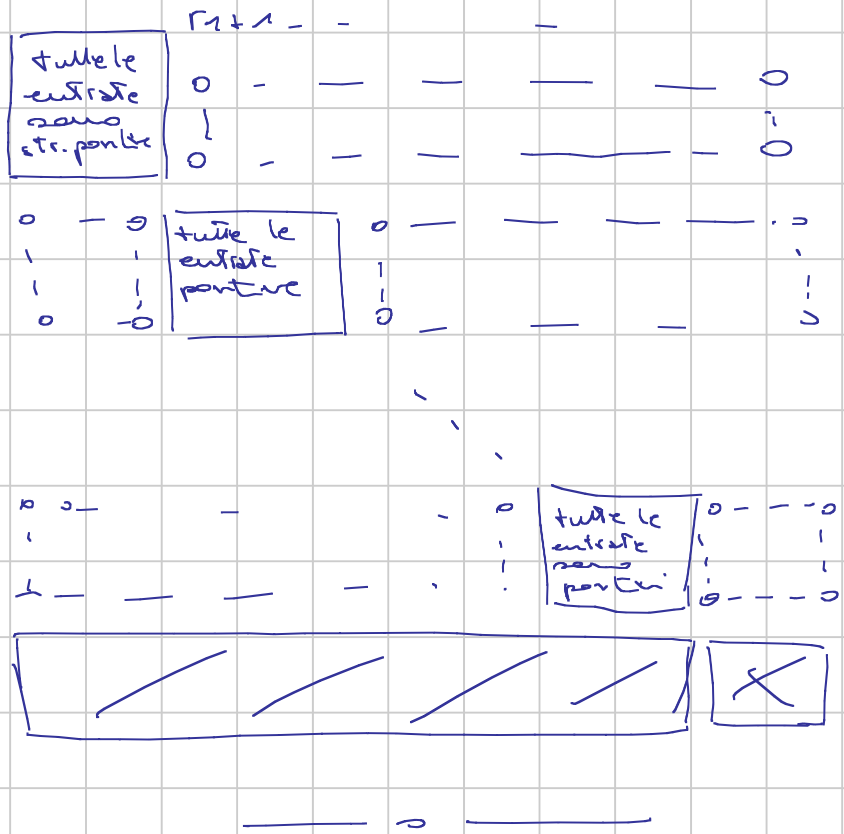
$S = \{1 \ldots N\}$

$\underbrace{a - \quad r_1}$

stere d

$\underbrace{1 \; - - - \; r_1}_{\text{stati nella stessa classe chiusa minimale}} \quad \underbrace{r_1+1 \; - - - \; r_2}_{\text{stati della stessa classe chiusa minimale}} \quad - - - - \quad \underbrace{r_{s-1}+1 \; - - \; r_s \quad r_{s+1} \; - - \; N}_{\text{stati che non nella stessa classe chiusa minimale}}$

$$B := I + P + P^2 + \dots + P^{N-1}$$



Sia $P \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ matrice stocastica e sia $S = \{1, \dots, N\}$ l'insieme dei suoi stati.

Siano $C_1, \dots, C_r$ le sue classi chiuse minimali

Pongo $C := \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ $\quad T := S \setminus C$

Allora $\forall i,j \in S$ si ha

i) Se $i \not\to j \Rightarrow p_{ij}^{(k)} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

ii) Se $j \in C$ allora j è ricorrente e $\sum_{k \in \mathbb{N}} p_{ij}^{(k)} = +\infty$ $\quad \forall i$ t.c. $i \to j$

iii) Se $j \in T$ allora j è transiente e $p_{ij}^{(k)}$ converge a 0 con velocità esponenziale $\Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} p_{ij}^{(k)}$ converge.

(iii NO DIM)

DIM ii) $j \in C_a$ classe chiusa minimale.

$$p_{jh}^{(n)} = 0 \quad \text{sse} \quad h \notin C_a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1 = \sum_{h\in S} p_{jh}^{(n)} = \sum_{h\in C_a} p_{jh}^{(n)}$$

$$\sum_{h\in C_a}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} p_{jh}^{(n)}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{h\in C_a} p_{jh}^{(n)}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 = +\infty$$

$\exists\, h_0 \in C_a$ t.c. $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} p_{jh_0}^{(n)} = +\infty}$

$h_0 \in C_a \Rightarrow h_0 \longleftrightarrow j$

In particolare $\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c. $p_{h_0 j}^{(k)} > 0$

$n \in \mathbb{N}$

$$p_{jj}^{(n+k)} = (\underline{P}^n \cdot \underline{P}^k)_j^j = \sum_{\alpha\in S} p_{j\alpha}^{(n)} p_{\alpha j}^{(k)} \geq$$

$$\geq p_{jh_0}^{(n)} p_{h_0 j}^{(k)}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} p_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} p_{jj}^{(n+k)} \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} p_{jh_0}^{(n)} p_{h_0 j}^{(k)} =$$

$$= \underbrace{p_{h_0 j}^{(k)}}_{>0} \underbrace{\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} p_{jh_0}^{(n)}}}_{=+\infty} = +\infty$$