MATRICI STOCASTICHE

Titolo nota 04/12/2014

Indico con $\mathbb{R}^{N*}$ i vettori riga di N componenti reali

$e_1 = (1, \underbrace{0 \ldots\ldots 0}_{N-1})$ $\quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$

$\ldots \quad e_N = (\underbrace{0 \ldots}_{N-1}, 0, 1)$

Un vettore riga $x \in \mathbb{R}^{N*}$ si dice un VETTORE STOCASTICO se:

$$\begin{cases} x_i \geq 0 & \forall i = 1 \ldots N \\ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \end{cases}$$

L'insieme dei vettori stocastici si indica $\mathcal{J}$.

$\mathcal{J}$ è convesso e compatto

$0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1 \ldots N$

$x, y \in \mathcal{J} \quad \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in \mathcal{J}$

$\hookrightarrow$ DIM PER ESERCIZIO

Una matrice $\underline{P} = (P^i_j) \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ si dice stocastica se ogni sua riga è un vettore stocastico:

$$\begin{cases} P^i_j \geq 0 & \forall i, j = 1 \ldots N \\ \sum_{j=1}^{N} P^i_j = 1 & \forall i = 1 \ldots N \end{cases}$$

<u>DEF</u> Per $\underline{P} \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ definisco $P : \mathbb{R}^{N*} \to \mathbb{R}^{N*}$ definita da $x \in \mathbb{R}^{N*} \longmapsto x\underline{P} \in \mathbb{R}^{N*}$

<u>PROP</u> $\underline{P} \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ è una matrice stocastica SSE $P(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}$ cioè $x\underline{P} \in \mathcal{J} \ \forall x \in \mathcal{J}$

DIM 1) Supponiamo che $\underline{P}$ sia una matrice stocastica

Prendo $x \in \mathcal{Y}$

$$\Rightarrow (P(x))_j = (x\underline{P})_j = \sum_{i=1}^{N} x_i P^i_j \geq 0 \quad \forall j = 1 \ldots N$$

$$\sum_{j=1}^{N} (P(x))_j = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} x_i P^i_j = \sum_{i=1}^{N} x_i \left(\sum_{j=1}^{N} P^i_j\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$\Rightarrow x\underline{P} \in \mathcal{Y}$$

2) Supponiamo $P(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}$

$x = e^k \in \mathcal{Y}$ So che $P(e^k) \in \mathcal{Y}$

$$0 \leq (P(e^k))_j = \sum_{i=1}^{N} \delta_{ik} P^i_j = P^k_j$$

$$1 = \sum_{j=1}^{N} (P(e^k))_j = \sum_{j=1}^{N} P^k_j \quad \Rightarrow \underline{P} \text{ è stocastica}$$

— o —

Sia $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dico che x_j è un VETTORE STOCASTICO se $x_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} x_j = 1$$

Sia S un insieme numerabile (che chiamo INSIEME DEGLI STATI).

Sia $\{x_j\}_{j \in S}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Dico che $\{x_j\}_{j \in S}$ è un vettore stocastico (indicizzato da S) se $x_j \geq 0 \quad \forall j \in S$

$$\sum_{j \in S} x_j = 1$$

Dico che una doppia successione $\{P^i_j\}_{i,j \in S}$ è una MATRICE STOCASTICA se

$$\begin{cases} P^i_j \geq 0 & \forall i,j \in S \\ \sum_{j \in S} P^i_j = 1 & \forall i \in S \end{cases}$$

$x_n \qquad \sum x_n$ converge

$\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutazione $\quad y_n = x_{\pi(n)}$

$\underline{\qquad} \Rightarrow \underline{\quad}$

$$\ell^1 = \{(x_j)_{j \in S} : \sum_{j \in S} |x_j| \text{ converge}\}$$

$$\tilde{\ell}_1 = \{ (P^i_j)_{i,j \in S} : \|\underline{P}\|_\infty := \sup_{j \in S} \sum_{i \in S} |P^i_j| < +\infty \}$$

b) Se S è numerabile, è vero che l'insieme dei vettori stocastici indicizzati da S è ancora un convesso compatto nell'insieme delle successioni indicizzate da S?

$\underline{\text{NO}}$: $\underbrace{\text{è convesso}}_{\text{DIM PER ESERCIZIO}}$ ma non è compatto

$x^{(n)} \in \mathcal{I} \qquad x^{(1)} = (1, 0, 0 \underline{\qquad\qquad})$

$x^{(2)} = (0, 1, 0, \underline{\qquad\qquad})$

$x^{(n)}_j = \delta_{nj} \qquad j \in \mathbb{N}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \; \cdots \end{matrix}$$

$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \forall n > j \qquad x^{(n)}_j = 0 \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\{x^{(n)}\}$ converge alla successione identicamente nulla che $\underline{\text{non}}$ è un vettore stocastico

$\Rightarrow \mathcal{I}$ non è chiuso per successioni $\Rightarrow$ non è compatto

$x \in \ell^1 \qquad x = (x_j)_{j \in S} \qquad \sum_{j \in S} |x_j| < +\infty$

$\underline{P} \in \tilde{\ell}_1 \qquad \|\underline{P}\|_\infty := \sup_{i \in S} \sum_{j \in S} |P^i_j| < +\infty$

$(x\underline{P})_j = \sum_{i \in S} x_i P^i_j \qquad \sum_{i \in S} |x_i P^i_j| < +\infty \quad \forall j \in S$

$$\sum_{j\in S} |(xP)_j| = \sum_{j\in S} \left|\sum_{i\in S} x_i P^i_j\right| \le \sum_{j\in S}\sum_{i\in S} |x_i P^i_j| =$$

$$= \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} |x^i||P^i_j| = \sum_{i\in S} |x^i| \underbrace{\left(\sum_{j\in S} |P^i_j|\right)}_{\le \|P\|_\infty \ \forall i\in S} \le$$

$$\le \|P\|_\infty \sum_{i\in S} |x^i| < +\infty \quad \text{perché } x\in \ell_1$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in S} |x_i P^i_j| < +\infty \quad \forall j\in S \Rightarrow (xP)_j \text{ è ben definito}$$

$$(xP)_j := \sum_{i\in S} x_i P^i_j$$

e xP di componente j-esima $(xP)_j$ è in ℓ_1

cioè è ben definita

$$P : x\in \ell^1 \longmapsto xP \in \ell^1$$

$P, Q \in \tilde{\ell}^1$ $\qquad (PQ)^i_j = \sum_{k\in S} P^i_k Q^k_j$ è ben definito?

$$\sum_{j\in S} |(PQ)^i_j| = \sum_{j\in S} \left|\sum_{k\in S} P^i_k Q^k_j\right| \le$$

$$\le \sum_{k\in S}\sum_{j\in S} |P^i_k||Q^k_j| = \sum_{k\in S} |P^i_k| \underbrace{\left(\sum_{j\in S} |Q^k_j|\right)}_{\le \|Q\|_\infty \ \forall k} \le$$

$$\le \|Q\|_\infty \underbrace{\sum_{k\in S} |P^i_k|}_{\le \|P\|_\infty \ \forall i} \le \|Q\|_\infty \|P\|_\infty$$

PROP Se $P \in \tilde{\ell}_1$ è una matrice indicizzata da S, allora P è stocastica sse

$$xP \in \mathcal{Y} \quad \forall x\in \mathcal{Y}$$

cioè, detta $P : x\in \ell_1 \longmapsto xP \in \ell_1$ si ha

$$P(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}$$

GRAFO ORIENTATO

(V, E) $\quad V =$ insieme finito di punti distinti (detti NODI) che indico $1, 2, \ldots N$ dove $N = \# V$

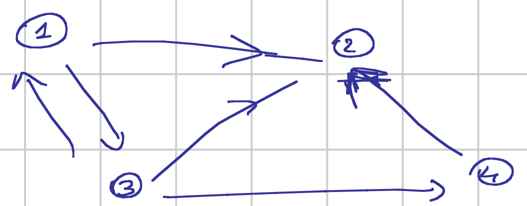
ed E è un sottoinsieme delle coppie ordinate in $V \times V$

$$E \subseteq \{ (i,j) \; : \; i,j \in \{1 \ldots N\} \}$$

Se $(i,j) \in E$, (i,j) si chiama ARCO ORIENTATO DEL GRAFO

$$\underset{\in E}{(i, j_1)} \underset{\in E}{(j_1, j_2)} \underset{\in E}{(j_2, j_3)} \ldots \underset{\in E}{(j_k, j_{k+1})} \underset{\in E}{(j_{k+1}, j)}$$

si dice un CAMMINO DA i VERSO j



Se i nodi sono N si definisce $A \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ in questo modo

$$A^i_j = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E \\ 0 & (i,j) \notin E \end{cases}$$

GRAFI PESATI

Un grafo pesato è un grafo (V, E) in cui ad ogni arco $(i,j) \in E$ si associa un PESO $p_{ij} > 0$

Un grafo rappresentabile con $A \in M_{N,N}(\mathbb{R})$

$$A^i_j = \begin{cases} p_{ij} & \text{se da } i \text{ a } j \text{ c'è un arco di peso } p_{ij} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$1 = \sum_{j=1}^{N} p^i_j \qquad \forall i \in \{1 \ldots N\}$$

$\underline{P} = (P^i_j) \quad \underline{P} = (p_{ij})$

$(\underline{P}^{n})^i_j = p^{(n)}_{ij} \qquad P^0 = Id = (\delta_{ij})$

DEF Sia $\underline{P}$ una matrice stocastica indicizzata da S (finito o numerabile)

Siano $i, j \in S$

Dico che <u>i vede j</u> (o che j è accessibile da i) se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $p^{(n)}_{ij} > 0$. Si scrive $i \to j$

Dico che i e j <u>comunicano tra loro</u> se $i \to j$ e $j \to i$. Si scrive $i \longleftrightarrow j$.

Se $\forall\, i, j \in S$ $i \longleftrightarrow j$, dico che la matrice $\underline{P}$ è irriducibile.

PROP La relazione $i \longleftrightarrow j$ è una relazione di equivalenza in S.

DIM