INDIPENDENZA

Titolo nota 21/11/2014

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

Se $A, B \in \mathcal{E}$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ con $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B) > 0$

allora $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ e viceversa

$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

DEF Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato.

Siano $A, B \in \mathcal{E}$. Dico che A e B sono EVENTI INDIPENDENTI se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Se $E_1 \dots E_n \in \mathcal{E}$, dico che $E_1 \dots E_n$ è una famiglia di eventi indipendenti se

$\forall k = 2, \dots n$ e $\forall \{r_1 \dots r_k\} \subset \{1 \dots n\}$ si ha che

$$\mathbb{P}(E_{r_1} \cap E_{r_2} \cap \dots \cap E_{r_k}) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(E_{r_i})$$

$\Omega = \{0,1\}^2$ $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ Prob. uniforme.

$A_1 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 = 1\} = \{(1,0), (1,1)\}$

$A_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_2 = 1\} = \{(0,1), (1,1)\}$

$A_3 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_1 + \omega_2 = 1\} = \{(1,0), (0,1)\}$

$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$A_1 \cap A_2 = \{(1,1)\}$ $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$

$A_1 \cap A_3 = \{(1,0)\}$ $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4}$

$A_2 \cap A_3 = \{(0,1)\}$ $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ Gli insiemi sono a due a due indipendenti

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \overset{?}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^3$ FALSO perché $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$

ESERCIZIO Dimostrare che se A e B sono indipendenti $\Rightarrow$ A e B^c sono coppie di eventi indipendenti.

B^c e A

A^c e B^c

V.A. INDIPENDENTI

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ v.a.

$Y: \Omega \to \mathbb{R}^m$

X e Y si dicono V.A. INDIPENDENTI se

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ si ha

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B)$$

ovvero $X^{-1}(A)$ e $Y^{-1}(B)$ sono eventi indipendenti

ovvero $\mathbb{P}_{X,Y}(A \times B) = \mathbb{P}_X(A)\,\mathbb{P}_Y(B)$

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}\big((X,Y) \in A \times B\big) = \mathbb{P}_{X,Y}(A \times B)$$

$\mathcal{J} = \{A \times B,\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\}$ è un semianello

che genera $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$

$\to \mathbb{P}_{X,Y}(A \times B) = \mathbb{P}_X(A)\,\mathbb{P}_Y(B)$

$X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ v.a. indipendenti su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$Y: \Omega \to \mathbb{R}^m$

$f: \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ Borel-misurabile nonnegativa

$$\to \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,\mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathbb{P}_Y(dy) \right) \mathbb{P}_X(dx)$$

(si dimostra prima per f semplice e poi con Beppo Levi)

$A = \prod_{i=1}^{n} (-\infty, t_i]$ $\quad B = \prod_{j=1}^{m} (-\infty, s_j]$ $\quad t = (t_1 \ldots t_n)$

$s = (s_1 \ldots s_m)$

$$F_{X,Y}(t,s) = \mathbb{P}_{X,Y}(A \times B) = \mathbb{P}_X(A)\,\mathbb{P}_Y(B) = F_X(t)\,F_Y(s)$$

— o —

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $Y: \Omega \to \mathbb{R}^m$ v.a. indipendenti

$\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^h$ $\quad \beta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ - misurabile $\quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ - misurabile

$\alpha \circ X : \Omega \to \mathbb{R}^h$ $\quad \beta \circ Y : \Omega \to \mathbb{R}^k$

v.a. $\quad$ v.a.

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h) \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

$$\mathbb{P}(\alpha \circ X \in A, \beta \circ Y \in B) = \mathbb{P}(X \in \underbrace{\alpha^{-1}(A)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}, Y \in \underbrace{\beta^{-1}(B)}_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)})$$

$$= \mathbb{P}(X \in \alpha^{-1}(A))\,\mathbb{P}(Y \in \beta^{-1}(B)) =$$

$$= \mathbb{P}(\alpha \circ X \in A)\,\mathbb{P}(\beta \circ Y \in B)$$

<u>TEO</u> $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. indipendenti e di speranze finite

Allora XY ha speranza finita

e $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Di conseguenza $Cov(X,Y) = 0$

$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$

<u>DIM</u> $\mathbb{E}[|XY|] = ?$

$|XY| = f \circ (X, Y) \quad f(x,y) = |xy|$

$$\mathbb{E}[|XY|] = \int_{\mathbb{R}^2} |xy|\, \mathbb{P}_{X,Y}(dx\,dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |xy|\, \mathbb{P}_Y(dy) \right) \mathbb{P}_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |x| \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |y|\, \mathbb{P}_Y(dy) \right)}_{\mathbb{E}[|Y|]} \mathbb{P}_X(dx) = \mathbb{E}[|Y|]\,\mathbb{E}[|X|]$$

$f(x,y) = xy$

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X]$