V.A. vettoriali

Titolo nota 20/11/2014

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discrete

$X(\Omega) = \{t_i\}_{i \in I}$ $\quad I = \{1, \dots, n\}$ o $I = \mathbb{N}$

$Y(\Omega) = \{s_j\}_{j \in J}$ $\quad J = \{1, \dots, m\}$ o $J = \mathbb{N}$

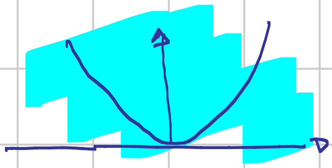
$p_i = \mathbb{P}(X = t_i) \quad i \in I$

$q_j = \mathbb{P}(Y = s_j) \quad j \in J$

$(X, Y) : \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$

$(X, Y)(\Omega) \subseteq X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$\begin{cases} X : t \in \mathbb{R} \to t \in \mathbb{R} \\ Y : t \in \mathbb{R} \to t^2 \in \mathbb{R} \end{cases}$



$(X,Y) : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t^2) \in \mathbb{R}^2$

Nel nostro caso

$(X, Y)(\Omega) \subseteq \{t_i\}_{i \in I} \times \{s_j\}_{j \in J}$

$p_{ij} := \mathbb{P}(X = t_i, Y = s_j) \quad (i,j) \in I \times J$

$(p_{ij})_{i,j \in I \times J}$ si dice MATRICE DELLE DENSITÀ CONGIUNTE

$\mathbb{P}(X = t_i)$

$Y(\Omega) = \{s_j\}_{j \in J}$ $\qquad \{Y = s_j\}$ $j \in J$ sono una partizione di Ω

$$p_i := \mathbb{P}(X = t_i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = t_i, Y = s_j) = \sum_{j \in J} p_{ij} \quad \forall i \in I$$

$\{X = t_i\}$ $i \in I$ sono una partizione di Ω

$$q_j := \mathbb{P}(Y = s_j) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = t_i, Y = s_j) = \sum_{i \in I} p_{ij} \quad \forall j \in J$$

ESEMPIO

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{L}^1)$

$E, F \in \mathcal{B}([0,1])$ $\qquad X = \mathbb{1}_E \qquad Y = \mathbb{1}_F$

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0,1\}$$

$$\mathbb{P}_X = \mathcal{B}(p) \qquad p = \mathcal{L}^1(E)$$

$$\mathbb{P}_Y = \mathcal{B}(q) \qquad q = \mathcal{L}^1(F)$$

$$(X,Y) : \omega \in [0,1] \mapsto (\mathbb{1}_E(\omega), \mathbb{1}_F(\omega)) \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = ?$$

$$\{X=1, Y=1\} = \{\omega \in [0,1] : \omega \in E \cap F\}$$

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathcal{L}^1(E \cap F)$$

1) $E = [0, \frac{1}{4}] \qquad F = [\frac{3}{4}, 1]$

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \mathcal{B}(\tfrac{1}{4})$$

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathcal{L}^1(E \cap F) = \mathcal{L}^1(\emptyset) = 0$$

2) $E = [0, \frac{1}{4}] \qquad F = [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \mathcal{B}(\tfrac{1}{4})$$

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathcal{L}^1(E \cap F) = \mathcal{L}^1([\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}]) = \tfrac{1}{8}$$

— o —

DEF Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e sia $X = (X_1, \dots, X_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$.
Se $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ si ha che $\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ è in $\mathcal{E}$ allora dico che X è una funzione vettoriale $\mathcal{E}$-misurabile o che X è una V.A. a valori vettoriali

PROP Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e siano $X_1, X_2, \dots X_N : \Omega \to \mathbb{R}$.
Allora la funzione vettoriale $X = (X_1, \dots X_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è una V.A. vettoriale se e solo se tutte le funzioni $X_1 \dots X_N$ sono v.a. reali (scalari)

(DIM A GESSO)

— o —

$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato

$X = (X_1 \_\_ X_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ v.a. vettoriale

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \quad \mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X \in A)$

$(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mathbb{P}_X)$ è uno spazio probabilizzato

La misura $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mathbb{P}_X)$ si dice DISTRIBUZIONE DELLA V.A. VETTORIALE X

$\forall t = (t_1, \_\_ t_N) \in \mathbb{R}^N$

$$\mathbb{P}\left(X \in \prod_{i=1}^{N} (-\infty, t_i]\right) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1, \dots X_N \le t_N)$$

$F_X : t = (t_1 - t_N) \mapsto \mathbb{P}(X_1 \le t_1, \dots X_N \le t_N) \in [0,1]$

F_X si dice LEGGE CONGIUNTA di $X_1 \_\_ X_N$

$X_1 \dots\dots X_N$ sono v.a. in $\mathbb{R}$

$\mathbb{P}_{X_1} \_\_\_ \mathbb{P}_{X_N}$ si dicono DISTRIBUZIONI MARGINALI di $X = (X_1 \dots X_N)$

$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ v.a. vettoriale

$X = (X_1, \dots X_n)$ $\quad X_i$ v.a. reali

$Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$ v.a. vettoriale

$Y = (Y_1 \dots Y_m)$ $\quad Y_j$ v.a. reali

$(X, Y) := (X_1 \dots X_n, Y_1 \dots Y_m) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$

$X_1 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ v.a. vettoriale su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$X_2 : \Omega \to \mathbb{R}^m$ v.a. vettoriale su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$X := (X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$

Supponiamo di conoscere $\mathbb{P}_X$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{P}_{X_1}(A) = \mathbb{P}(X_1 \in A) = \mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in \mathbb{R}^m)$$
$$= \mathbb{P}(X \in A \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{P}_X(A \times \mathbb{R}^m)$$

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad \mathbb{P}_{X_2}(B) = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}^n \times B)$

Esattamente come nel caso scalare si ha:

TEO Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ sp. probabilizzato

Siano $X_1, \_ X_N : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. e sia

$\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ Borel-misurabile nonnegative

Allora $\psi \circ (X_1, \dots X_N) : \Omega \to \mathbb{R}$ è una v.a.

e $\int_\Omega \psi \circ (X_1(\omega) \dots X_N(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) =$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(t_1 \dots t_N) \mathbb{P}_X (dt_1 \dots dt_N)$$

dove $\mathbb{P}_X$ è la distribuzione congiunta di $X_1 \dots X_N$

DIM Come per le v.a scalari e le composizione con $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ Borel-misurabili si dimostra

1) ψ funzione semplice
2) ψ Borel-misurabile nonnegative, con il Teorema di Beppo Levi

FORMULA DI COMPOSIZIONE

$X = (X_1, \_ X_N)$ v.a. vettoriale su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

$\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ Borel-misurabile

$\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$ Borel-misurabile nonnegative

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^k} \psi(s_1 \dots s_k) \mathbb{P}_{\varphi \circ X} (ds_1 \dots ds_k) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (\psi \circ \varphi)(t_1 \_ t_N) \mathbb{P}_X (dt_1 \dots dt_N)$$

SOMMA DI V.A.

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^N$ v.a.

$\varphi(x,y) = x + y \qquad \varphi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^N$

$\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ Borel misurabile nonnegative

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(s_1 \dots s_N)\, \mathbb{P}_{X+Y}(ds_1 \dots ds_N) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \psi(u_1+v_1, \dots u_N+v_N)\, \mathbb{P}_{(X,Y)}(du_1 \dots du_N dv_1 \dots dv_N)$$

$$(\underbrace{u_1 \dots u_N}_{u}, \underbrace{v_1 \dots v_N}_{v}) \qquad \varphi(u,v) = (u_1+v_1, u_2+v_2 \dots u_N+v_N)$$

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \qquad \psi = \mathbb{1}_A$$

$$\mathbb{P}_{X+Y}(A) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathbb{1}_A(u_1+v_1 \dots u_N+v_N)\, \mathbb{P}_{(X,Y)}(du_1 \dots du_N dv_1 \dots dv_N)$$

$$= \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : u+v \in A\})$$

$$A = \prod_{i=1}^{N} (-\infty, t_i] \implies \mathbb{P}_{X+Y}(A) = F_{X+Y}(t_1 \dots t_N)$$

$$F_{X+Y}(t_1 \dots t_N) = \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : u_1+v_1 \le t_1, u_2+v_2 \le t_2, \dots u_N+v_N \le t_N\})$$

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

$$F_{X+Y}(t) = \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u+v \le t\}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

— o —

$X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ v.a. su $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

Dico che la distribuzione $\mathbb{P}_X$ è ASSOLUTAMENTE CONTINUA se

$\exists\, f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{L}^N$- sommabile

e t.c. $\quad \mathbb{P}_X(A) = \int_A f(s_1 \dots s_N)\, ds_1 \dots ds_N \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

f si dice DENSITÀ DELLA DISTRIBUZIONE $\mathbb{P}_X$

$$F_X(t_1 \dots t_N) = \int_{\prod_{i=1}^{N}(-\infty, t_i]} f(s_1 \dots s_N)\, ds_1 \dots ds_N =$$

$$= \int_{-\infty}^{t_1} ds_1 \int_{-\infty}^{t_2} ds_2 \dots \int_{-\infty}^{t_N} f(s_1 \dots s_N)\, ds_N$$

PROPOSIZIONE Se $X : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è una v.a., allora

X è A.C. con densità f SSE

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(s_1 \dots s_N)\, \mathbb{P}_X(ds_1 \dots ds_N) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(s_1 \dots s_N) f(s_1 \dots s_N)\, ds_1 \dots ds_N$$

per ogni funzione $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ Borel-misurabile nonnegativa.

DIM 1) φ funzione semplice
2) φ Borel-misurabile nonnegativa, col Teorema di Beppo Levi.

— o —

VALORE ATTESO

PROP. Sia $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ spazio probabilizzato e siano $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

Allora $\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]}$.

DIM 1) Se $\mathbb{E}[X^2]$ o $\mathbb{E}[Y^2] = +\infty$, niente da dimostrare

2) Se $\mathbb{E}[X^2]$ o $\mathbb{E}[Y^2] = 0$, allora
o $X = 0$ q.c. o $Y = 0$ q.c.
In ogni caso $|XY| = 0$ q.c. $\Rightarrow \mathbb{E}[|XY|] = 0$

3) $\mathbb{E}[X^2]$ e $\mathbb{E}[Y^2]$ sono entrambe finite e positive.

$$a(\omega) = \frac{|X(\omega)|}{\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}} \qquad b(\omega) = \frac{|Y(\omega)|}{\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}}$$

$$0 \leq (a(\omega) - b(\omega))^2 = a^2(\omega) + b^2(\omega) - 2a(\omega)b(\omega)$$

$$2a(\omega)b(\omega) \leq a^2(\omega) + b^2(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega$$

$$2\int_\Omega a(\omega)b(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \leq \int_\Omega a^2(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) + \int_\Omega b^2(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}}\int_\Omega |XY|(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \le \frac{\cancel{\int_\Omega X^2(\omega)\mathbb{P}(d\omega)}}{\cancel{\mathbb{E}[X^2]}} 1 + \frac{\cancel{\int_\Omega Y^2(\omega)\mathbb{P}(d\omega)}}{\cancel{\mathbb{E}[Y^2]}} 1 = 2$$

$$\mathbb{E}[|XY|] \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}$$

$$Y \equiv 1 \qquad \mathbb{E}[|X|] \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

$$\mathcal{L}^1(\Omega,\mathbb{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ v.a. t.c. } \mathbb{E}[|X|] < +\infty\}$$
$$\mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ v.a. t.c. } \mathbb{E}[X^2] < +\infty\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^1(\Omega,\mathbb{P}) \supseteq \mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{P})$$

$$\Phi : \mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{P}) \times \mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{P}) \to \mathbb{R}$$
$$\Phi : (X,Y) \mapsto \mathbb{E}[XY]$$

$$|\mathbb{E}[XY]| \le \mathbb{E}[|XY|] \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\cdot\mathbb{E}[Y^2]}$$

$$\Phi(a_1X_1 + a_2X_2, Y) = \mathbb{E}[(a_1X_1 + a_2X_2)Y_2] =$$
$$= \mathbb{E}[a_1X_1Y + a_2X_2Y] = a_1\mathbb{E}[X_1Y] + a_2\mathbb{E}[X_2Y]$$
$$= a_1\Phi(X_1) + a_2\Phi(X_2)$$

$$\Phi(X,Y) = \Phi(Y,X)$$

Φ è un'applicazione bilineare simmetrica

$$\Psi(X) = \sqrt{\Phi(X,X)} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$