Metodi Matematici e Probabilistici - B046 –2013-2014

Quarto Appello – 16 Giugno 2014

n. 1

Domanda 1) (10 punti) Si lanciano due dadi non truccati.

– se esce lo stesso numero su entrambi i dadi si lanciano 2 monete non truccate;

– se escono due numeri diversi ma entrambi pari o entrambi dispari si lanciano 3 monete non truccate;

– altrimenti si lanciano 4 monete non truccate.

Calcolare la probabilità di ottenere esattamente due teste nel lancio delle monete.

Sapendo che nel lancio delle monete si sono ottenute esattamente due teste, calcolare la probabilità di aver ottenuto lo stesso numero nel lancio dei dadi.

$\mathbb{P}_1 = \frac{17}{48}$, $\mathbb{P}_2 = \frac{2}{17}$.

È richiesta la risposta esatta scritta sottoforma di frazione

Svolgimento

Domanda 2) (10 punti) Si lanciano due dadi non truccati.

– se esce lo stesso numero su entrambi i dadi si lanciano 4 monete non truccate;

– se escono due numeri diversi ma entrambi pari o entrambi dispari si lanciano 3 monete non truccate;

– altrimenti si lanciano 2 monete non truccate.

Calcolare la probabilità di ottenere esattamente due teste nel lancio delle monete.

Sapendo che nel lancio delle monete si sono ottenute esattamente due teste, calcolare la probabilità di aver ottenuto lo stesso numero nel lancio dei dadi.

$\mathbb{P}_1 = \frac{5}{16}$, $\mathbb{P}_2 = \frac{1}{5}$.

È richiesta la risposta esatta scritta sottoforma di frazione

Svolgimento

Domanda 3) (10 punti) La v.a. X segue la distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. La v.a. Y è bernoulliana di parametro $p \in [0, 1]$.
Calcolare densità e media della v.a. X^2.
Sapendo che X e Y sono indipendenti, calcolare funzione di ripartizione e media della v.a. $Z := XY$.

$$f_{X^2}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \qquad \mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{2}{\lambda^2}, \qquad F_Z(t) = \begin{cases} 1 - pe^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \qquad \mathbb{E}[Z] = \frac{p}{\lambda}.$$

Svolgimento

Domanda 4) (10 punti) La v.a. X segue la distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. La v.a. Y è bernoulliana di parametro $p \in [0,1]$.
Calcolare densità e media della v.a. X^2.
Sapendo che X e Y sono indipendenti, calcolare funzione di ripartizione e media della v.a. $Z := X + Y$.

$$f_{X^2}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad \mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{2}{\lambda^2}, \quad F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ (1-p)(1-e^{-\lambda t}) & 0 \leq t < 1 \\ (1-p) - pe^{-\lambda t}(e^{\lambda} - 1) & t \geq 1 \end{cases}, \quad \mathbb{E}[Z] = \frac{1 + p\lambda}{\lambda}.$$

Svolgimento

Domanda 5) (10 punti) Siano $\lambda > 0$ e $p \in [0,1]$. La v.a. Y segue la distribuzione di Poisson di parametro λ. La v.a. X è distribuita sull'insieme $\{0,1\}$ e

$$\mathbb{P}(X=1|Y=k) = p^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Calcolare la densità delle v.a. X e $Z = XY$.

$\mathbb{P}_X = \mathrm{Ber}\left(\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}\right)$, $\qquad p_Z(k) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{(p\lambda)^k}{k!} & k = 1, 2, \ldots \\ 1 + \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{p\lambda}\right) & k = 0 \end{cases}.$

Svolgimento

Domanda 6) (10 punti) La v.a. Y segue la distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. La v.a. X è distribuita sull'insieme $\{0, 1\}$ e

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = k) = \frac{1}{k+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Calcolare la densità delle v.a. X e $Z = XY$.

$$\mathbb{P}_X = \mathrm{Ber}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\right), \qquad p_Z(k) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{(k+1)!} & k = 1, 2, \dots \\ \dfrac{\lambda - 1 + \mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda + 1)}{\lambda} & k = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento